Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano - 3º Bimestre / 2014

Plano de Trabalho

Geometria Analítica

Tarefa 2

Cursista: Jocimar de Avila

Tutora: Danúbia

S u m á r i o

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo levar o aluno a compreender e resolver problemas que envolvam distância entre dois pontos e enxergar a eficácia da geometria analítica.

A ideia inicial é propor que os alunos explorarem a visão geométrica, que lhes permitirão imaginar, de forma indutiva, algum método para determinar a distância entre dois pontos, a partir do conhecimento das suas coordenadas, até a apresentação de métodos algébricos que permitem deduzir e entender as formas de calcular a equação de uma reta.

Será apresentado o um vídeo para se ter conhecimento da parte histórica da Geometria Analítica e a aplicabilidade que a geometria analítica tem em nosso cotidiano, abordagem pratica e teoria na sala de aula fica bem mais fácil e interessante para os mesmos.

Sendo assim, este plano de trabalho apresenta atividades, que visam apresentar aos alunos o plano cartesiano, seus pontos e suas retas de maneira simples. Enriquecendo desta forma o aprendizado e a percepção dos alunos acerca das propriedades envolvidas.

É importante, que os discentes compreendam e fixem de forma simples e dinâmica o assunto aqui abordado.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- **Habilidade Relacionada**: Resolver problemas envolvendo distância entre dois pontos.

- **Pré-Requisitos:** Operações elementares com números reais; resolução de equações do 2° grau; potenciação; produtos notáveis.H02-Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.H16-Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

- **Tempo de Duração:** 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados:** Vídeo e livro didático

- **Organização da Turma:** Individual

- **Objetivos:** Apresentar o contexto histórico no qual foram definidos a Geometria Analítica.Mostrar a importância do conteúdo abordado em situações do cotidiano.

- **Metodologia Adotada:**

1. Geometria Analítica

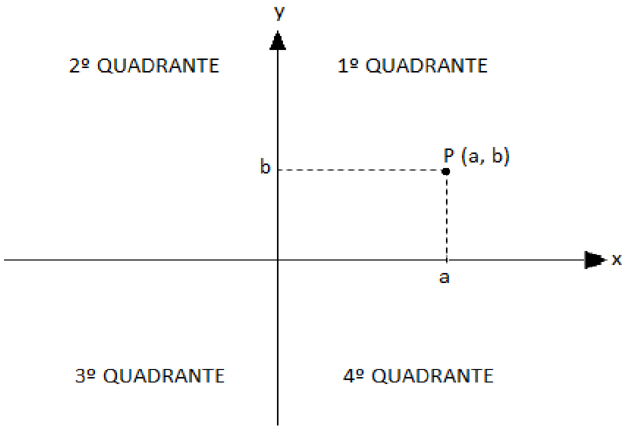
1.1 Histórico da Geometria analítica

Apresentação do vídeo "Tesouro Cartesiano" da série:Matemática na Escola (duração de 10:27), com o objetivo de informar o assunto a ser tratado.

1.2. Sistema Cartesiano

Na aula de hoje , vamos começar com o sistema cartesiano.

Ele é constituído por duas retas x e y, perpendiculares entre si.



Onde:

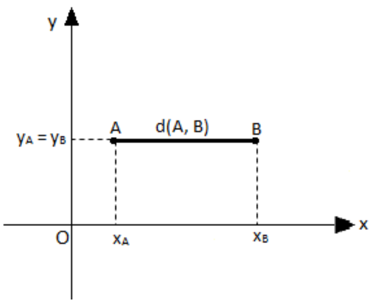
- A reta x é denominada eixo das abscissas;
- A reta y é denominada eixo das ordenadas;
- O ponto 0 é denominado origem;
- O número real a é denominado abscissa de P;
- O número real b é denominado ordenada de P;
- O par ordenado (a,b) representa as coordenadas de P.

2-Distância entre dois pontos no plano:

A distância entre dois pontos distintos $A(x_A , y_A)$ e $B (x_B , y_B)$ é o número real não negativo d(A,B), também denominado como **comprimento do segmento** AB.

Observe os casos abaixo:

1° caso: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo dos x.

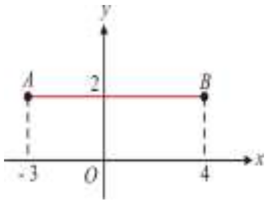


Neste caso, as ordenadas dos pontos A e B são iguais, ou seja, $y_A = y_B$.

A distância entre os pontos A e B, ou o comprimento do segmento AB, é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, de modo que:

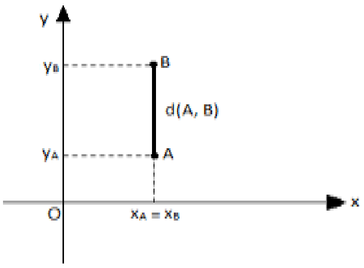
$$\boldsymbol{d_{AB} = |x_A - x_B|} \quad \textbf{(1)}$$

Exemplo 1: Determinar a distância entre os pontos A(−3,2) e B(4,2).



$$\boldsymbol{d_{AB} = |x_A - x_B| = |- 3 - 4| = |- 7| = 7}$$

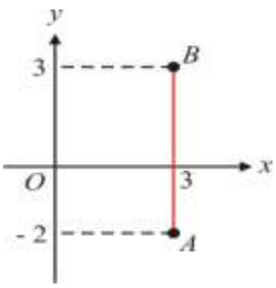
2º caso: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo dos y



Neste caso, as abscissas dos pontos A e B são iguais, ou seja, $\boldsymbol{x_A = x_B}$. A distância entre os pontos A e B, ou o comprimento do segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, é dada pelo módulo da diferença das ordenadas de A e B, de modo que:

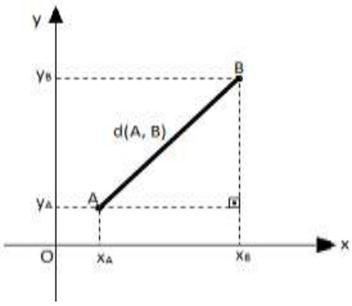
$$\boldsymbol{d_{AB} = |y_A - y_B|} \quad (2)$$

Exemplo 2: Determinar a distância entre os pontos A(3,−2) e B(3,3).



$d_{AB} = |y_A - y_B|$ =|−2−3|=|−5|=5

3º caso: O segmento $\overline{AB}$ é oblíquo aos eixos



Este é o caso geral, pois a fórmula que encontraremos também resolve os dois casos anteriores. Vejam que as retas que passam pelo ponto x_B paralela ao eixo dos y e pelo ponto y_A paralela ao eixo dos x, definem um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{AB}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \qquad (3)$$

No entanto, temos que $\overline{BC}=|y_A - y_B|$ e $\overline{AC}=|x_A - x_B|$ Se substituirmos em (3), vem que:

$$\overline{AB}^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2 \quad \textbf{(4)}$$

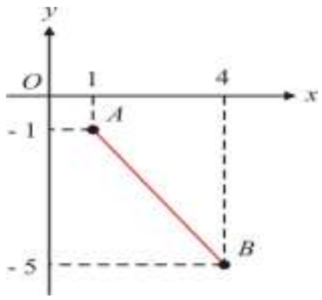
Como para todo a ∈ R, então $|a|^2 = a^2$, reescrevemos a equação (4):

$$(d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

Agora, basta extrairmos as raízes de ambos os lados da equação

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad \textbf{(5)}$$

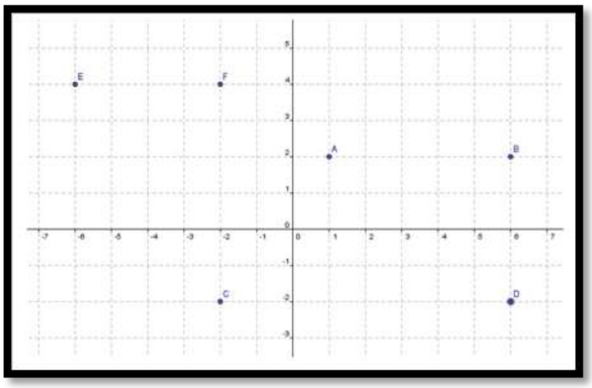
Exemplo 3: Determine a distância entre os pontos A(1,−1) e B(4,−5).



$$d_{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Exercícios:

1) Observando a Figura 1, identifique as coordenadas dos pontos indicados e complete as Tabelas 1, 2 e 3.



Ponto	Coordenada
A	(,)
B	(,)

Tabela 1

Ponto	Coordenada
C	(,)
D	(,)

Tabela 2

Ponto	Coordenada
E	(,)
F	(,)

Tabela 3

Os valores esperados são:

Ponto	Coordenada
A	(1 ,2)
B	(6 ,2)

Tabela 1

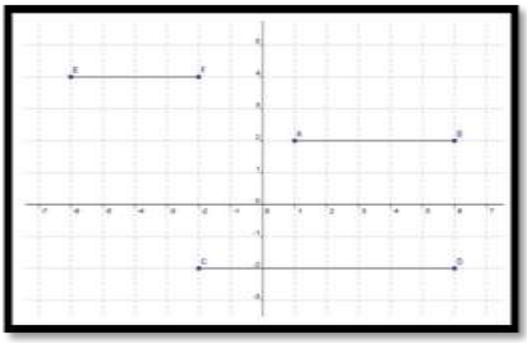
Ponto	Coordenada
C	(-2,-2)
D	(6 ,-2)

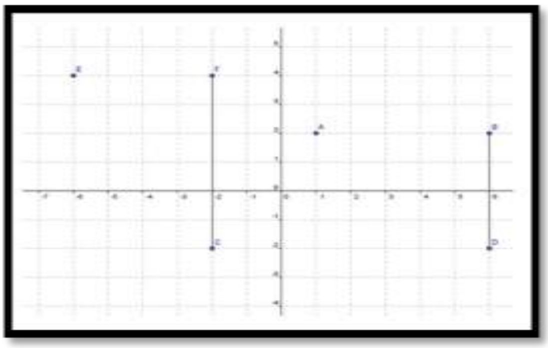
Tabela 2

Ponto	Coordenada
E	(-6,4)
F	(-2 ,4)

Tabela 3

2) Considerando como unidade de medida o tamanho do quadrado da malha; determine a distância entre os pares de pontos: A e B, C e D, E e F, C e F, D e B. Isto é, calcule o comprimento dos segmentos AB, CD, EF, CF e DB, mostrados nas Figuras 2 e 3. Complete as Tabelas 4 e 5 para organizar as informações





Segmento	Medida
AB	5
CD	
EF	

Tabela 4

Segmento	Medida
DB	
CF	

Tabela 5

Os valores esperados são:

Segmento	Medida
AB	5
CD	8
EF	4
Tabela 4	

Segmento	Medida
DB	4
CF	6
Tabela 5	

Atividade 2

*** Habilidade Relacionada**: Geometria Analítica - Distância entre dois pontos.

H16 - Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano .

* **Pré-Requisitos:** Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas; Teorema de Pitágoras; módulo de um número real.

- **Tempo de Duração:** 25 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Livro didático
- **Organização da Turma:** Em dupla
- **Objetivos:** Revisão e fixação através de atividades de avaliações.

Metodologia Adotada: Uma lista de exercícios extra para a melhor fixação da atividade 01.

Lista de exercícios de fixação

1)Sendo A(1,2); B(3,5) e C(6,7) vértices de um triângulo, classifique esse triângulo em escaleno,equilátero ou isósceles.

2) Obtenha o valor de m para que a distância do ponto A(m,1) ao ponto B(4,0) seja de 2 unidades.

3) A distância da origem do sistema cartesiano ao ponto médio do segmento de extremos (–2,–7) e (–4,1) é:

4) Classifique o triângulo ABC, de vértices A(–1,1); B(5,0) e C(1,2).

5) A distância do ponto A(a,a) ao ponto B(6a,13a) é:

6) O valor de y , para qual e distância do ponto A (1, 0) ao ponto B (5, y) seja 5 é:

7) O ponto pertencente ao eixo das abscissas que dista 13 unidades do ponto A (-2, 5) é:

8) O ponto do eixo das ordenadas equidistantes dos pontos A(1, 2) e B (-2, 3) tem ordenadas?

9) O perímetro do triângulo ABC dados A (-1,1), B (4, 13) e C (-1, 13) é:

10) O ponto do eixo Ox equidistante dos pontos (0, -1) e (4, 3) é:

11) Sendo A (3, 1) B (4, -4) e C (-2, 2) vértices de um triângulo, mostre que esse triângulo é isósceles e não é retângulo.

12) Sendo A (3; 1), B (4; -4) e C (-2; 2) os vértices de um triângulo, mostre que ele é isósceles.

13) As coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades (5; -2) e (-1; -4) são:

14) O maior valor real de k para que a distância entre os pontos A (k; 1) e B (2; k) seja igual a é:

15) Dados A (-1; 7) e B (4; y), se a distância entre A e B for 5. Então y deverá ser:

Gabarito

Questão 1) isósceles

Questão 2) $m = \pm 4$

Questão 3) $d_{OM} = 3$

Questão 4) escaleno

Questão 5) 13a

Questão 6) 3

Questão 7)10

Questão 8) 4

Questão 9) 30

Questão 10) (3, 0)

Questão 11) isósceles e não retângulo

Questão 12) isósceles

Questão 13) (2; -3)

Questão 14) 3

Questão 15) 10

Atividade 03

*** Habilidade Relacionada**: Cálculo do coeficiente angular de uma reta conhecendo dois pontos e a equação de uma reta.H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

- **Pré-Requisitos:** Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.
- **Tempo de Duração:** 150 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Livro didático
- **Organização da Turma:** Individual
- **Objetivos:** Relembrar os conceitos sobre o ângulo de inclinação definido por uma reta. Compreender o conceito de coeficiente angular de uma reta. Perceber que, para o cálculo do coeficiente angular e a equação de uma reta é necessário e suficiente, conhecer as coordenadas de dois pontos dessa reta.
- **Metodologia Adotada:**

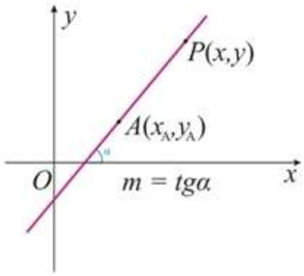
Geometria Analítica

1. A reta

1.1. Equação fundamental da reta

Podemos representar uma reta r do plano cartesiano por meio de uma equação. Essa equação pode ser obtida a partir de um ponto A($\boldsymbol{x_A}, \boldsymbol{y_A}$) e do coeficiente angular m dessa reta.

Considere uma reta r não-vertical, de coeficiente angular m, que passa pelo ponto A($\boldsymbol{x_A}, \boldsymbol{y_A}$). Vamos obter a equação dessa reta, tomando um ponto P(x, y) tal que P ≠ A.



A equação fundamenta da reta é:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

- Exercício:

  1- Considere a reta r definida pelos pontos A(1,4) e B(2,1):

  a) Encontre o coeficiente angular da reta r.

  b) Determine a equação da reta r.

O aluno deve concluir que o coeficiente angular da reta é dado pela expressão dada abaixo:

$$\boldsymbol{m = \frac{1-4}{2-1} = -3.}$$

Com o coeficiente angular, podemos tomar um ponto genérico M(x,y) e um ponto qualquer da reta e obter a equação da reta:

$$\boldsymbol{\frac{y-1}{x-2} = m = -3 \rightarrow (y-1) = -3.(x-2) = -3x + 6 \rightarrow y = -3x + 7.}$$

1.2. Equação geral da reta

Toda reta r do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo:

$$ax + by + c = 0$$

Em que:

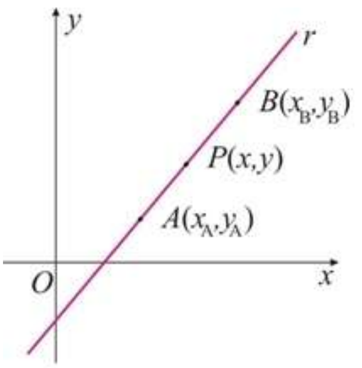
• a, b, e c são números reais;

• a e b não são simultaneamente nulos.

Podemos obter a equação geral de uma reta r conhecendo dois pontos não coincidentes de r:

$$A(x_a, y_a) \; e \; B(x_b, y_a)$$

Para isso, usa-se a condição de alinhamento de A e B com um ponto genérico P(x,y) de r.



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow ax + by + c = 0$$

Essa equação relaciona x e y para qualquer ponto P genérico da reta. Assim, dado o ponto P(m, n):

- se am + bn + c = 0, P é o ponto da reta;
- se am + bn + c ≠ 0, P não é ponto da reta.

- Exemplos:

1- Vamos considerar a equação geral da reta r que passa por A(1, 3) e B(2, 4). Considerando um ponto P(x, y) da reta, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 4 - 6 - 4x - y = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

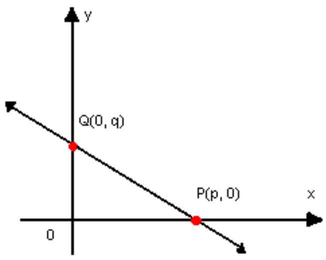
2- Vamos verificar se os pontos P(-3, -1) e Q(1, 2) pertencem à reta r do exemplo anterior.

Substituindo as coordenadas de P em x - y + 2 = 0, temos: -3 - (-1) + 2 = 0→ -3 + 1 + 2 = 0. Como a igualdade é verdadeira, então P ∈ r.

Substituindo as coordenadas de Q em x - y + 2 = 0, obtemos: 1 - 2 + 2 ≠ 0 . Como a igualdade não é verdadeira, então Q ∉ r.

1.3. Equação segmentária

Considere a reta r não paralela a nenhum dos eixos e que intercepta os eixos nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com $\boldsymbol{p \neq 0 \; e \; q \neq 0}$.



A equação geral de r é dada por:

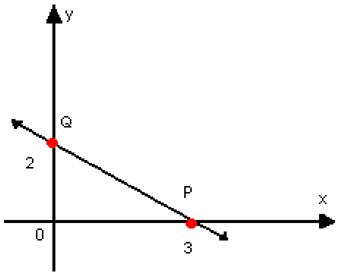
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -qx - py + pq = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0$$

Dividindo essa equação por pq$(\boldsymbol{pq \neq 0})$, temos:

$$\frac{\cancel{q}x}{p\cancel{q}} + \frac{\cancel{p}y}{\cancel{p}q} - \frac{\cancel{pq}}{\cancel{pq}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1} \text{(equação segmentári a da reta r)}$$

- Exemplo:

1- Vamos determinar a equação segmentária da reta que passa por P(3, 0) e Q(0, 2), conforme o gráfico:



$$p = 3$$
$$q = 2$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

1.4. Equações paramétricas

São equações equivalentes à equação geral da reta, da forma x= f(t) e y= g(t), que relacionam as coordenadas x e y dos pontos da reta com um parâmetro t.

Assim, por exemplo, $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma reta r.

Para obter a equação geral dessa reta a partir das paramétricas, basta eliminar o parâmetro t das duas equações:

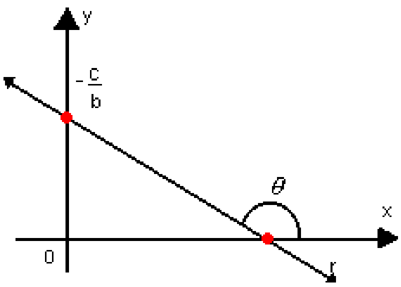
$$x = t + 2 \rightarrow t = x - 2$$

Substituindo esse valor em y = - t + 1, temos:

$\mathbf{y = -(x - 2) + 1 = -x + 3 \rightarrow x + y - 3 = 0}$ (equação geral de r)

1.5. Equação Reduzida

Considere uma reta r não-paralela ao eixo Oy:



Isolando y na equação geral ax + by + c = 0, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow -\frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$, temos:

$y = mx + q$

Chamada equação reduzida da reta, em que $m = -\frac{a}{b}$ fornece a inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

Quando a reta for paralela ao eixo Oy, não existe a equação na forma reduzida.

2. Exercícios de fixação:

Utilizar exercícios do livro didático, páginas 15 e 16, para fixação dos conteúdos abordados nesta atividade.

Atividade 04

*** Habilidade Relacionada**: Cálculo do coeficiente angular de uma reta conhecendo dois pontos e a equação de uma reta.

H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

- **Pré-Requisitos:** Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.
- **Tempo de Duração:** 25 minutos
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Livro didático
- **Organização da Turma:** Dupla
- **Objetivos:** Fixação e revisão dos conteúdos abordados na atividade anterior.
- **Metodologia Adotada:**

- Uma lista de exercícios para a melhor fixação da atividade 03. Com base no livro didático adotado pela escola, os exercícios serão das páginas 68 e 69 do livro “Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03”.

Colégio Estadual Coronel Francisco Lima

Professora: Jocimar   Data: __/__/__   Turma: 3001

Aluno(a):____   Nº: __________

Avaliação de Matemática

QUESTÃO 01

Calcule a distância entre os pontos dados:

a) A(3,7) e B(1,4)   Resposta: $\sqrt{13}$

b) E(3,1) e F(3,5)   Resposta: 4

c) H(-2,-5) e O(0,0)   Resposta: $\sqrt{29}$

QUESTÃO 02

Demonstre que o triângulo com os vértices A(0,5), B(3,-2) e C(-3,-2) é isósceles e calcule seu perímetro.

Resposta: $Perímetro = 2\sqrt{58} + 6$

QUESTÃO 03

A distância entre os pontos A(-1, 5), B(0,y) é √5. Determine a ordenada do ponto B.

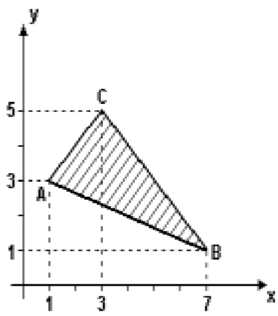
QUESTÃO 04

Determine a equação da reta que passa pelos pontos A(-1,-2) e B(5,2).

Resposta: y=2/3x + 2/3 - 2

QUESTÃO 05

No sistema de coordenadas cartesianas a seguir, está representado o triângulo ABC.
Em relação a esse triângulo, demonstre que ele é retângulo.



Resposta:

$\overrightarrow{AB} = (6, -2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{40}$

$\overrightarrow{AC} = (2, 2)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{BC} = (-4, 4)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{32}$

Logo: $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

As tarefas feitas nas atividades 2 e 4, feitas individualmente com consulta em 50 minutos, servirão para o docente observar se os alunos entenderam o assunto.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de uma avaliação escrita individual, teste sem consulta, (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos para a resolução das questões envolvendo a geometria analítica aqui estudada.

Neste plano de trabalho procurei utilizar os novos conhecimentos que obtive com os planos de ação da formação continuada. Queria poder explorar o roteiro de ação 3, mas infelizmente a escola não poderá disponibilizar o laboratório a tempo.

Mais uma vez, apesar de não ter a possibilidade de apresenta-los o Geogebra, pedi para aqueles que tivessem a curiosidade em aprender pesquisar mais sobre o programa e tirarem as dúvidas comigo.

FONTES DE PESQUISA

Iezzi, Gelson. Matemática: Ciências e Aplicações. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática: volume único. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2005.

ROTEIROS DE ACÃO – Geometria Analítica– Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2013 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 05/09/2014.

Endereços eletrônicos acessados de 01/09/2013 a 07/09/2013, utilizados ao longo do trabalho:

http://www.m3.ime.unicamp.br/recursos/1183

http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Plano-De-Aula-De-Geometria-Analitica/602710.html

http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html

http://www.infoescola.com/geometria-analitica/equacoes-da-reta/

http://somatematica.com.br/emedio/retas/retas5.php