Reforço escolar • Matemática •

Visita virtual a um Museu

Dinâmica 5

3º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª série do Ensino Médio	Geométrico	Geometria Analítica

Aluno

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • O preço do achocolatado

Questão

A turma de Lucas e Camille irá preparar o café da manhã para o aniversário da professora de História, muito querida da turma e eles ficaram responsáveis por comprar e preparar 15 litros de leite com achocolatado. Foram ao supermercado e observaram que o leite era vendido em várias marcas e preços. Como as embalagens disponíveis eram todas de 1 litro, ficou fácil escolher a de menor preço, simplesmente por comparação. Porém, na compra do achocolatado em pó, a escolha do menor preço se complicou. Nas embalagens de menor preço havia também uma menor quantidade de achocolatado, mas, com quantidades diferentes, cada uma delas. Ficou então a dúvida: Valia a pena levar 2 latas maiores de 1 kg ou várias latas menores?

A tabela a seguir apresenta os preços e quantidades das marcas A, B, C e D, além de uma comparação de preços e massas com o preço e a massa da marca A.

Verifique se os preços e as quantidades das diversas marcas são proporcionais e ajude Lucas e Camila a escolherem a marca com menor preço, respondendo às questões propostas.

Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ – Consórcio cederj

RAZÃO DA MASSA E DO PREÇO DE ACHOCOLATADOS EM PÓ EM RELAÇÃO À MASSA E AO PREÇO DO ACHOCOLATADO DA MARCA A				
ACHOCOLATADO EM PÓ	**MARCA**	**PREÇO EM REAIS**	**RAZÃO DA MASSA**	**RAZÃO DO PREÇO**
250 gramas	A	4,00	$\frac{250}{250} = 1$	$\frac{4}{4} = 1$
400 gramas	B	6,40	$\frac{400}{250} = \frac{40}{25} = 1{,}6$	$\frac{6{,}4}{4} = 1.6$
500 gramas	C	7,20	$\frac{500}{250} = 2$	$\frac{7{,}2}{4} = 1{,}8$
1 kilograma	D	16,40	$\frac{1000}{250} = 4$	$\frac{16{,}4}{4} = 4{,}1$

1. Observando as razões que aparecem na tabela, responda:

a. Há alguma marca em que a massa e o preço sejam proporcionais à massa e ao preço da marca A? Em caso afirmativo, qual?

b. Qual a marca em que a razão entre as massas é maior do que a razão entre os preços?

c. Você acha que o menor preço é aquele em que a razão entre as massas é maior do que a razão entre os preços ou aquele em que a razão entre as massas é menor do que a razão entre os preços?

2. Então, qual a marca que propõe o menor preço?

Aluno

3. Para conferir sua resposta, você pode calcular o preço de 1 kg do achocolatado de cada uma das marcas. Como você pode calcular esses preços? Para achar o preço de 250 g = 0,25 kg, se você sabe o preço de 1 kg, você pode multiplicar o preço do quilograma por 0,25. Então, se x é o preço de 1 kg do achocolatado de marca A, o preço da embalagem com 0,25 é encontrado pela multiplicação: 0,25 x. Ora, se 0,25 x = 4, tem-se,necessariamente, que

$x = \frac{4}{0{,}25}$, donde x = 16.

a. Complete a tabela a seguir, que apresenta as razões entre os preços e as quantidades das diversas marcas:

ACHOCOLATADO EM PÓ	MARCA	PREÇO EM REAIS	MASSA EM KG	PREÇO DO KILOGRAMA
250 GRAMAS	A	4,00	0,25	$\frac{4}{0{,}25} =$
400 GRAMAS	B	6,40	0,4	$\frac{6{,}4}{0{,}4} = \frac{64}{4} =$
500 GRAMAS	C	7,20	0,5	$\frac{7{,}2}{0{,}5} = \frac{72}{5} =$
1 KILOGRAMA	D	16.40	1	$\frac{16{,}4}{1} =$

b. Compare os preços de 1 kg de achocolatado de cada uma das marcas com as respostas que você deu às questões 1 e 2.

Segunda Etapa
Um novo olhar ...

Atividade • Uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis

Questão

Em agradecimento à festa de aniversário que a turma preparou para a professora de História, ela quis levar seus alunos a uma visita virtual ao Museu Imperial de Petrópolis. Para isso, ela dispõe de 2 salas na biblioteca com computadores conectados à internet. Numa delas há 2 computadores e na outra há 3. Ela foi procurar o professor de Matemática para saber quantas reservas ela deveria fazer de cada uma das salas para levar seus 36 alunos, ocupando todos os computadores, cada aluno num deles. O professor de Matemática lhe disse que isso os próprios alunos poderiam resolver. Ele sugeriu chamar de X a sala com 2 computadores e de Y a sala com 3 computadores.

Ele apresentou à professora a tabela a seguir e sugeriu que os alunos montassem a equação:

SALA	NÚMERO DE RESERVAS	NÚMERO DE ALUNOS ATENDIDOS
X, com 2 computadores	x	2x
Y, com 3 computadores	y	3y
Total		2x + 3y

Qual é a equação que o professor de Matemática espera que os alunos escrevam?

E alguns alunos já foram citando soluções para a equação:

Uns deram a solução x = 18 e y = 0. A professora reclamou:

- *Não vamos deixar uma sala vazia e gastar mais tempo ...*

Outros alunos disseram:

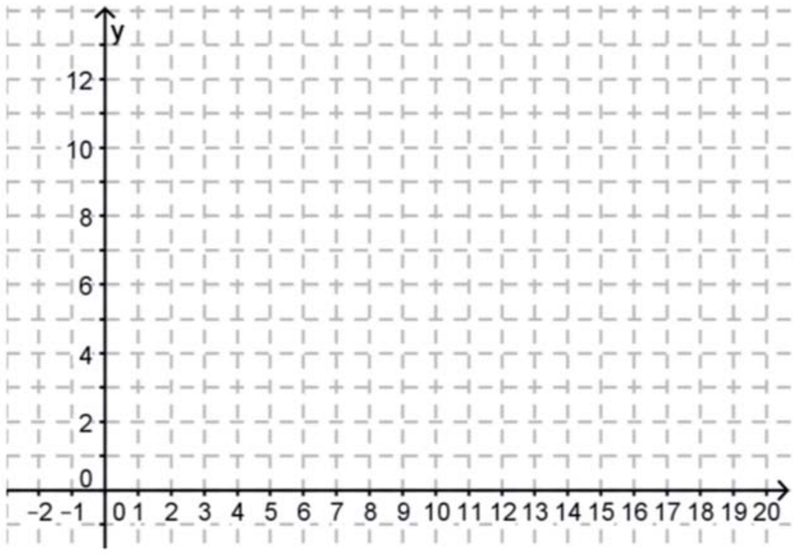
- *Então, podemos fazer* x = 0 *e* y = 12 e gastamos menos tempo.

E a professora:

- *Ainda deixamos uma sala vazia. Vocês não encontram outras soluções em que usemos ambas as salas?*

E você? Acha que são só essas soluções? Como essas soluções são pares de números, elas podem ser representadas por pontos num plano cartesiano. Veja o que acontece, se você fizer uma tabela com o máximo de soluções que encontrar e marcar essas soluções, no plano a seguir (algumas abscissas já estão dispostas decrescentemente na tabela):

X	Y	PONTO
18	0	A
15		G
12		F
9		E
6		D
3		C
0	12	B



Você acha que esses pontos estão todos na mesma reta ou é só aparência? Você pode estudar a geometria que está atrás desta figura?

Considere todos os ângulos com vértice em A que os segmentos AB, AC, AD, AE, AF e AG fazem com o eixo x. São ângulos agudos, pois são ângulos de triângulos retângulos. Calcule suas tangentes. Você lembra que a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo se calcula como $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$?

Então preencha a tabela a seguir, onde C', D', E', F' e G', são as projeções sobre o eixo x dos pontos C, D, E, F e G, respectivamente e O é a origem do sistema de coordenadas:

ÂNGULO	TRIÂNGULO RETÂNGULO	CATETO OPOSTO	CATETO ADJACENTE	TANGENTE DO ÂNGULO
$\widehat{OAB}$	AOB	12	18	$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
$\widehat{C'AC}$	AC'C		15	
$\widehat{D'AD}$	AD'D	8		$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$\widehat{E'AE}$	AE'E		9	
$\widehat{F'AF}$	AF'F	4		$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$\widehat{G'AG}$	AG'G		3	

Qual a conclusão que você tira sobre esses ângulos e sobre a posição dos pontos A, B, C, D, E, F e G?

E, voltando ao problema da professora de História, qual a distribuição que você aconselha para que essas visitas ocorram no menor tempo possível, admitindo que as visitas demorem, todas, o mesmo período de tempo?

Aluno

Até agora, como a professora estava precisando distribuir os alunos, os valores escolhidos para x e para y eram números naturais. Mas, pela figura, parece que x e y podem ser quaisquer números reais, mesmo negativos.

Você já deve ter ouvido falar que a Geometria Analítica, atribuindo coordenadas numéricas a pontos, permite trabalhar figuras com cálculos. Será que é isso que acontece com a reta AB?

A prova que foi feita para confirmação de que os pontos intermediários B, C, D, E, F e G estão todos na reta AB pode ser generalizada para mostrar que todos os pontos (x, y), tais que $2x + 3y = 36$, estão nesta mesma reta. Além disso, mostra-se que se um ponto (x, y) está nesta reta, então suas coordenadas x e y satisfazem à relação $2x + 3y = 36$.

Por isso, a equação $2x + 3y – 36 = 0$,diz-se equação geral da reta AB.

Em geral, dados números reais a, b, c, com, pelo menos a ou b diferente de 0, a equação

$$ax + by + c = 0,$$

diz-se **equação geral de uma reta**, pois todos os pontos desta reta têm coordenadas que satisfazem a esta relação e só coordenadas de pontos desta reta é que satisfazem a esta relação.

Se você está interessado em conhecer estas demonstrações, converse sobre isso com seu professor.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

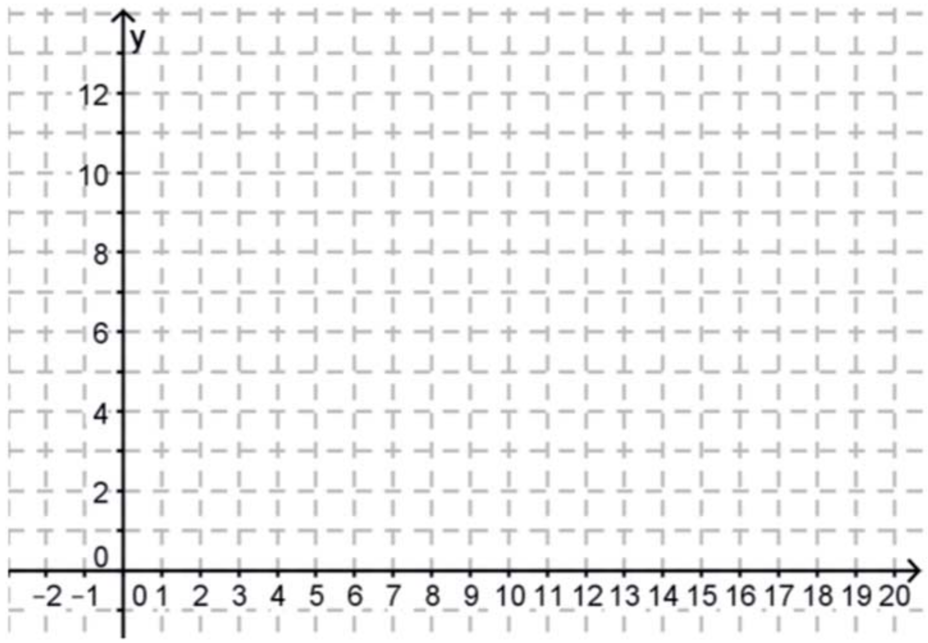
Atividade • Um desafio

Questão

Quando os alunos contaram ao professor de Matemática o problema que a professora de História tinha apresentado a eles, o professor resolveu aproveitar a oportunidade e deu o seguinte desafio aos alunos:

- Então, quero que vocês achem uma equação para a reta que passa pelos pontos P = (1, 2) e Q = (6, 5).

A primeira coisa que eles fizeram foi desenhar essa reta. Desenhe você também no plano cartesiano esboçado a seguir:



Como o professor pediu uma equação da reta, eles incluíram na figura um ponto

S = (x, y) nesta reta, no segmento PQ, diferente de P e de Q.

Passando uma paralela ao eixo dos x pelo ponto P, chame de S' e Q' as projeções, respectivamente, de S e de Q sobre esta reta.

Considere os triângulos retângulos PS'S e PQ'Q que são semelhantes. Por quê?

Matemática

Você pode usar essa semelhança e escrever a igualdade das razões entre seus catetos. Ou pode observar que o ângulo em P é comum aos dois triângulos, calcular o valor da tangente trigonométrica desse ângulo em cada um dos triângulos e escrever a igualdade. Vá em frente e mãos à obra!

Agora, com poucos cálculos, você chega à equação da reta na sua forma geral.

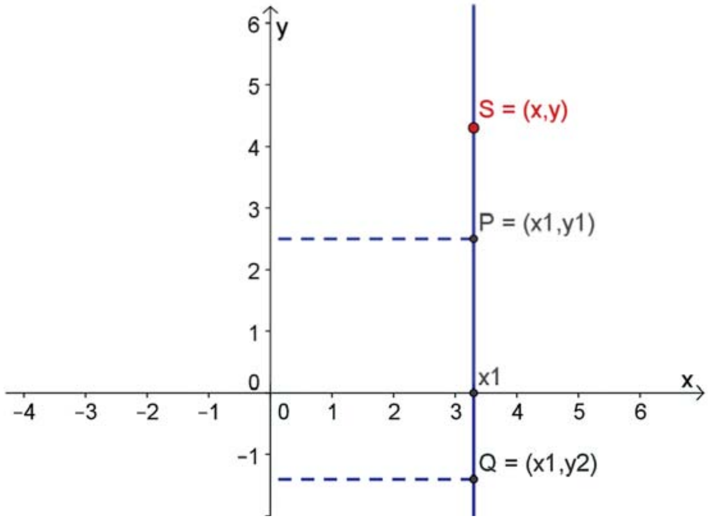
Observação: Se fossem tomados pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, por processo completamente análogo, você chegaria à equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q desenvolvendo a seguinte proporção:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Claro que esta equação só pode ser escrita quando $x_1 \neq x_2$. Mas se os pontos P e Q têm a mesma abscissa, isto é, se $x_1 = x_2$, então a reta PQ é paralela ao eixo y e sua equação geral será:

$\mathbf{x - x_1 = 0}$,

isto é: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -x_1$.



E, se você gosta mais de usar determinantes, fica mais fácil ainda decorar a expressão da equação geral da reta escrita por meio de um determinante de terceira ordem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se estiver curioso, verifique que essas duas expressões dão a mesma equação.

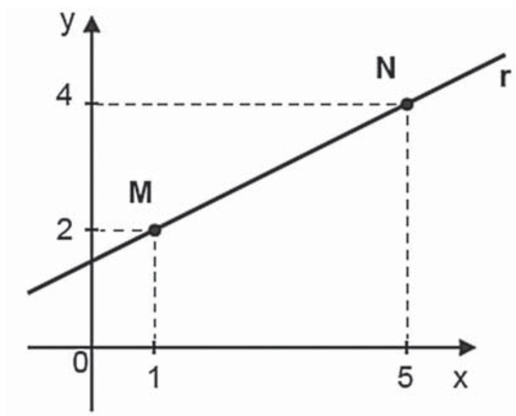
Quarta Etapa

Quiz

Questão

(*Saerjinho, prova para a 3ª série no 3º bimestre de 2012.*)

A reta r, desenhada no plano cartesiano a seguir, passa pelos pontos M e N.



Qual é a equação desta reta r?

a. $x - 2y + 3 = 0$

b. $x - y + 2 = 0$

c. $2x - y - 3 = 0$

d. $2x - y = 0$

e. $5x - y + 4 = 0$

Aluno

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex

Para saber +

1. Na teleaula de número 45,

   http://www.youtube.com/watch?v=-VjvHpwbnt8,

   você encontra a dedução da equação geral da reta dada por dois de seus pontos e alguns exemplos.

2. Você encontra mais exercícios para fazer sobre determinação de equações da reta em:

   http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-geral-reta.htm

   e

   http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/determinando-equacao-geral-reta.htm,

   onde os exercícios já estão resolvidos.

3. Em **http://www.matematicadidatica.com.br/ENEM2011q17.aspx**,

   você encontra a resolução de uma questão do ENEM de 2011, que envolve a equação de uma reta e distância entre pontos no plano cartesiano.

Aluno

Agora, é com você!

1. **(Saerjinho,** *3º bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 24* **)**

Júlio precisa pintar 360 metros quadrados de parede. Com uma lata de tinta com 18 litros, ele pintou 40 metros quadrados. Para terminar o serviço, de quantos litros de tinta ele ainda vai precisar?

a. 720

b. 342

c. 320

d. 162

e. 144

2. Nas aulas de História, os alunos ouviram falar sobre a pirâmide de Keops e a turma resolveu, então, construir uma pirâmide de acrílico que fosse miniatura daquela pirâmide.

http://commons.wikimedia.org/wiki/
File:09_khafre_cutting.jpg

Pesquisando no Google, ficaram sabendo que ela é uma pirâmide reta, de base quadrada, cuja altura é de aproximadamente 140 m e o lado da base é de aproximadamente 230 m. A miniatura que eles querem fazer deve ter 28 cm de altura. Quanto deve medir a aresta da base dessa miniatura?