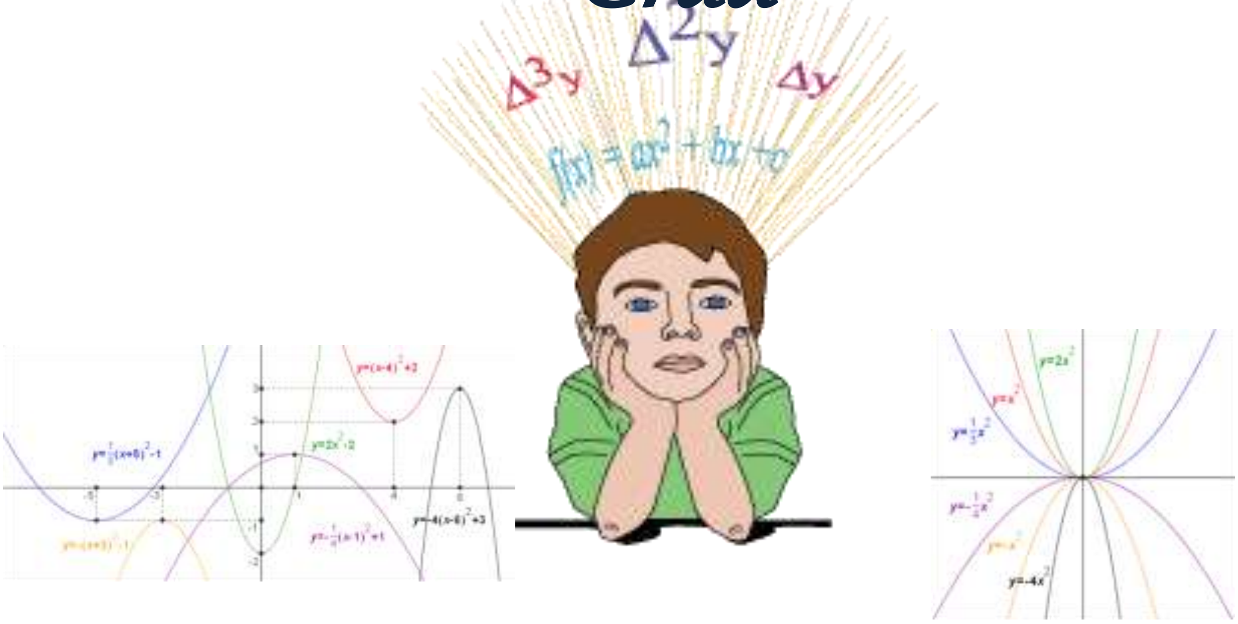
Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 1º ano – 3º Bimestre/ 2012

Plano de Trabalho

Função Polinomial do 2º Grau



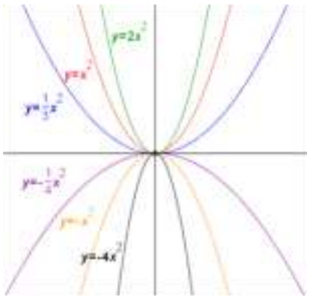
Fonte: http://www.uff.br/cdme/quadratica/quadratica-html/QP4.html acessado em 31/08/2012.

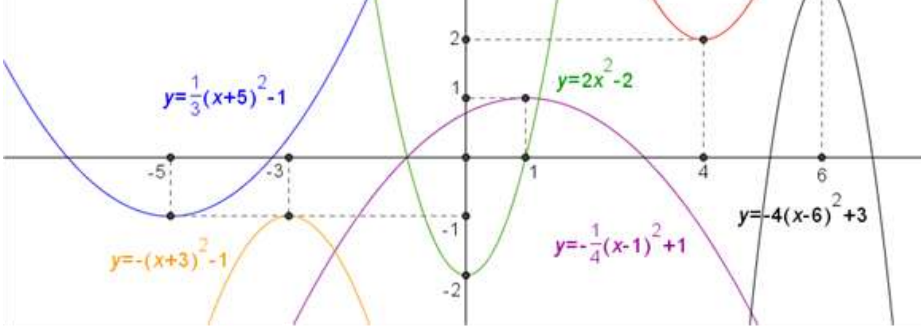
Tarefa 1

Cursista: *Conceição Aparecida Muniz Martins*

Tutora: *Anália Maria Ferreira Freitas*

Sumário





Fonte: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/EM_Funcao_do_segundo_grau.pdf acessado em 24/08/2012.

INTRODUÇÃO

A Função de 2º grau ou Função Quadrática é um tema da Matemática que envolve a resolução de fórmulas, geralmente a fórmula de Bháskara, e a associação de seus coeficientes à sua representação gráfica quase sempre muito abstrata para os alunos de sua.

Esse plano de trabalho tem por objetivo trabalhar esse assunto de uma forma mais contextualizada e significativa para os alunos. Visa associar conceitos estudados a situações do dia a dia e com isso mostrar a eles que esse conteúdo possui uma aplicabilidade prática, tornando-o mais próximo da realidade e menos abstrato.

Busca através de atividades diversificadas, como por exemplo, o uso do Geogebra um software de geometria dinâmica associar os coeficientes da função à sua representação gráfica; com o uso da forma canônica mostrar que a Função de 2º grau pode ser resolvida de uma forma mais simplificada de modo a facilitar o estudo do máximo e mínimo e os zeros da função.

Enfim, o objetivo principal é a construção do conhecimento pelo próprio aluno de uma forma significativa e contextualizada. Para a totalização do plano de trabalho serão necessários 8 tempos de cinqüenta minutos.

Para o estudo desse assunto é pré-requisito o conhecimento pelo aluno do plano cartesiano e suas coordenadas, potenciação e sistema de equações, fórmulas da área das figuras planas e resolução de equação de 2º grau, assuntos estudados no 9º ano do Ensino Fundamental que devem ser revisados antes da introdução do assunto Função de 2º grau ou Função Quadrática.

Desenvolvimento

Atividade 1

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Identificar uma função polinomial do 2º grau. Utilizar a função do 2º grau para resolver problemas. Identificar os coeficientes de uma equação do 2º grau. Resolver problemas envolvendo função do 2º grau (**H57**). Reconhecer a representação gráfica de uma função de 2º grau (**H62**). Escrever a forma canônica da Função de 2º grau.

- **PRÉ-REQUISITOS:** Multiplicação de equações. Fórmula da área do retângulo e do quadrado. Visita a horta da escola. Produto notável.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos (2 tempos de 50 minutos).

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Livro didático e figura da nossa horta com uma parte reservada (esquema). Notebook, software Geogebra e projetor multimídia.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Alunos dispostos em duplas.

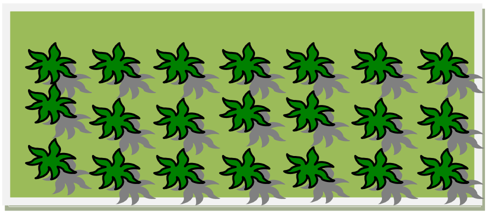
- **OBJETIVOS:** Reconhecer algebricamente através de uma solução problema uma função quadrática; identificar os coeficientes da função quadrática; Reconhecer a parábola como a representação gráfica de uma função de 2º grau Apresentar a forma canônica como outra maneira de escrever a função de 2º grau.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

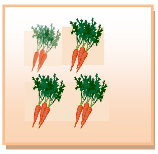
  Apresentar aos alunos um esquema e uma foto da horta escolar. A partir destes introduzir a seguinte situação problema:
  O senhor Zenildo (servente que cuida da horta da nossa escola) separou dois canteiros da horta este ano para plantar cenoura e alface.

Projeto Horta Orgânica, projeto de Educação Ambiental (10/06/2009) (Fonte: Arquivo do Elo 21).

Como nossa horta tem os canteiros em formato de figuras geométricas foi escolhido o canteiro quadrado para cenoura e o canteiro retangular para a alface. Observe o esquema na figura abaixo:



O canteiro reservado a alface é um retângulo com medidas 5m e (x+8)m.



O canteiro reservado a cenouras é um quadrado com medidas x m.

Será que podemos escrever uma fórmula em função de x que nos permita calcular a área total plantado com cenoura e alface?

Inicialmente vamos calcular a área do quadrado e a área do retângulo.

- Área do quadrado: $A_q = l \,.\, l = x \,.\, x = x^2$
- Área do retângulo: $A_r = b \,.h = 5(x+8) = 5x + 40$

Para determinar a área total disponível ao plantio de cenoura e alface, adicionamos essas áreas:

Área total disponível→ $y = x^2 + 5x + 4$

Área do quadrado + área do retângulo

Utilizando esta fórmula, vamos calcular a área disponível na horta para o plantio de alface e cenoura quando x é igual a 4 m:

$y = 4^2 + 5 . 4 + 40 = 76$

Assim, a área total disponível na horta para o plantio de alface e cenoura para x = 4 é 76 m^2.

A fórmula apresentada é uma **função quadrática ou função do 2º grau**, ou seja, uma função f, de R →R, que a todo número x ∈ R associa o número $ax^2 + bx + c$, com a,b e c reais e $a \neq 0$.

$$f: R \rightarrow R$$

$$y = ax^2 + bx + c \text{ ou } f(x) = ax^2 + bx + c$$

Atenção no expoente de x: ele é 2, por isso do 2º grau e $a \neq 0$.

Observações:

Dizemos que a,b e c são os coeficientes da função quadrática.

Alguns exemplos de **função quadrática ou função do 2º grau:**

- $f(x) = x^2 + 4x + 3$, sendo a = 1, b = 4 e c= 3
- $g(x) = 3x^2$, sendo a = 3, b = 0 e c = 0

E como fica o gráfico da Função Quadrática? (deixar os alunos dar sua opinião e não confirmar e nem descartar)

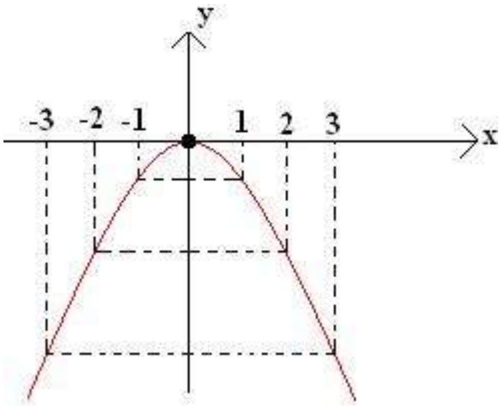
Então dizer: Existe um software de geometria dinâmica chamado Geogebra que vai nos ajudar a descobrir isso.

Com a ajuda do notebook do professor e datashow, abrir o Geogebra e digitar na janela de entrada a função quadrática $f(x) = x^2 + 4x + 3$ e clicar para mostrar seu gráfico no plano cartesiano. Depois deixar que cada aluno que quiser escreva uma função na janela de entrada.(Tentar colocar funções com a>0 e a< 0)

Chamar a atenção para as posições das parábolas.

Então concluir:

"A representação geométrica de uma função do 2º grau é dada por uma **parábola**, que de acordo com o sinal do coeficiente **a** pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo."



Curiosidade: parábola vem do latim e significa lançamento, por isso vemos tantas em problemas envolvendo futebol, vôlei, lançamento de dardos, basquete, por exemplo.

Fonte: Wikipédia, acessado em 18/08/2012

Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/concavidade-uma-parabola.htm acessado em 23/08/2012

Em alguns casos, podemos escrever uma função quadrática de outra maneira, chamada **forma canônica**.

Isso significa usar a técnica de completar quadrados para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinar suas raízes. Vamos ver:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$ (colocando a em evidência nos dosi primeiros termos do trinômio)

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$ (aplicando a técnica de completar quadrados)

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$ (passando o termo $-\frac{b^2}{4a^2}$ para fora dos parênteses multiplicado por a)

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$ (fatorando o trinômio quadrado perfeito e operando)

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \text{ (Achando as raízes)}$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \therefore x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fonte: Roteiro de ação 5 – Curso de acompanhamento, acessado em 18/08/2012

A forma canônica, para todo x ∊ R e a ≠ 0, de qualquer função quadrática f(x) = $ax^2 + bx + c$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$f(x) = a(x - m)^2 + k$,

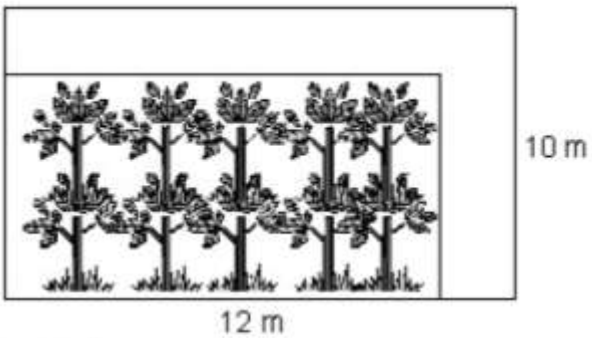
em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = f(m)$.

Dizer aos alunos que a forma canônica facilita o estudo de máximo, mínimo e zeros da f. quadrática que estudaremos mais adiante.

Exercícios de fixação:

Questão 1: Descritor H 57 C1 e H 62 C 1

Em um terreno retangular de 10 m x 12 m, deseja-se construir um jardim com 80 m² de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.



A largura do caminho deve ser de

(A) 1 m. (B) 1,5 m. ➡(C) 2 m. (D) 2,5 m. (E) 3 m.

Resolução:

Uma forma de solucionar esse problema é identificar a largura da faixa para o caminho como tendo um valor arbitrário "x". Assim, a área do jardim é dada pela multiplicação dos lados do terreno, que tem formato de um retângulo, em que cada lado deve ser subtraído do valor "x", ou seja: Ajardim = (12 - x) . (10- x) = 80.
Desenvolvendo a relação, tem-se: $x^2 - 22x + 120 = 80$. Resolvendo a equação de 2º grau, obtém-se que x = 2.

Fonte: Matriz saeb, acessado em 28/07/2011.

Questão 2: **Descritor H 62 C1**

O produto de um número natural x pelo seu consecutivo é igual a 12. A equação que permite determinar o valor de x é:

a) $X^2 + x + 12 = 0$
b) $X^2 + x - 12 = 0$
c) $X^2 + 3x + 4 = 0$
d) $X^2 - 3x - 4 = 0$

Resolução:

Número natural = x

Nº consecutivo = x + 1

x (x + 1) = 12

$X^2 + x = 12$

$X^2 + x - 12 = 0$, opção a.

Questão 3:

Escreva as funções quadráticas a seguir na forma canônica.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$

1ª maneira

a = 1 b = 2 c =4

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2.1} = -1$

$k = f(m) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$

Logo: $f(x) = 1[x - (-1)]^2 + 3$

$f(x) = (x + 1)^2 + 3$

b) $g(x) = -5x^2 + 20x - 8$

1ª maneira

a = -5 b = 20 c = 8

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2.-5} = 2$

$k = f(m) = -5.(2)^2 + 20(2) - 8 = 12$

Logo: $f(x) = -5(x - 2)^2 + 12$

2ª maneira: Completando os quadrados

$f(x) = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3$

$f(x) = (x+1)^2 + 3$

2ª maneira: Completando os quadrados

$g(x) = -5x^2 + 20x - 8 = -5x^2 + 20x - 8 - 12 + 12 =$

$g(x) = -5x^2 + 20x - 20 + 12 = -5(x^2 - 4x + 4) + 12$

$g(x) = -5(x-2)^2 + 12$

Fonte: Ciências, Linguagem e Tecnologia - Matemática – Ed. Scipione

Questão 4:

Uma função **do 2º grau** nos dá sempre:

a) uma reta
b) uma hipérbole
c) uma parábola
d) uma elipse

Fonte: http://www.supletivounicanto.com.br/docs/matematica/funcao_2_grau.pdf, acessado em 26/08/2012.

- **AVALIAÇÃO:**

Durante a execução desta atividade, desde o início através de observação das respostas dos alunos e dos exercícios de fixação, será avaliado se os alunos conseguiram identificar os coeficientes da Função Quadrática; resolver problemas envolvendo função do 2º grau (**H57**); reconhecer a representação gráfica de uma função de 2º grau (**H62**) e escrever a forma canônica da Função de 2º grau.

Atividade 2

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Resolver problemas que recaiam na resolução de uma equação do 2º grau da forma $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$ (**H57 C1**).Utilizar a função do 2º grau para resolver problemas.

- **PRÉ-REQUISITOS:** Equação de 2º grau (9º ano E. fundamental). Coeficientes a, b e c da função quadrática. Potenciação. Representação gráfica da Função de 2º grau. Trinômio quadrado perfeito.Quadrado da soma e quadrado da diferença.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos (2 tempos de 50 minutos).

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Livro didático e vídeo **Esse tal Bháskara,** notebook, software Geogebra e projetor multimídia**.**

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Alunos dispostos em duplas.

- **OBJETIVOS:** Resolver as equações de 2º grau utilizando a fórmula de Bháskara e a forma canônica; identificar os coeficientes da função quadrática. Relacionar as raízes da equação de 2º grau aos zeros da função quadrática.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Iniciar a aula com o vídeo **Esse tal Bháskara,** disponível na midiateca do curso de acompanhamento que será passado com o auxílio do notebook do professor e data show. Em seguida, através de conversa informal dizer aos alunos que os zeros da função quadrática são os valores reais de x para os quais a função $f(x) = ax^2+bx+c$ se anula $[f(x) = 0]$.
Assim para obtermos os zeros de uma função quadrática, atribuímos o valor de 0 para f(x) e resolvemos a equação de 2º grau $ax^2+ bx+ c$ usando a fórmula de Bháskara ou o método de completar os quadrados descrito no vídeo.

Fórmula de Bháskara: x = $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e que $\Delta = b^2 - 4ac$

Nesta fórmula
$\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado
discriminante.

Dependendo do valor do discriminante Δ (delta), podemos ter as seguintes situações gráficas. Observe:

Vamos usar mais uma vez o Geogebra para nos auxiliar. Utilizaremos como exemplo a função quadrática $f(x) = x^2 + x – 6$

Vamos digitar a função quadrática $f(x) = x^2 + x – 6$ na janela de entrada e clicar para mostrar seu gráfico.

Já aprendemos que o lugar onde a parábola toca o eixo do x são os zeros da função ou as raízes da mesma.

Então, olhando no gráfico o que podemos falar sobre as raízes desta função? São iguais ou diferentes? (resposta: diferentes) Quantas e quais são elas? (resposta: 2 - -3 e 2)

Agora vamos calculá-las pela fórmula de Bháskara: $f(x) = x^2 + x – 6 \rightarrow f(x) = 0$

$x^2 + x – 6 = 0$ a = 1 b=1   c= -6

$\Delta = 1^2 – 4 . 1 . -6 = 25 > 0$ (positivo)

$X = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.1}$ $x' = \frac{-1+5}{2} = 2$ $x'' = \frac{-1-5}{2} = -3$

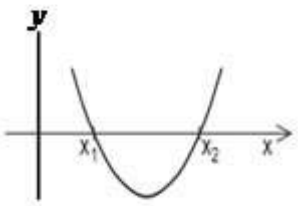
Vamos testar outra função quadrática: $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Vamos repetir o procedimento no Geogebra e calcular o delta, que será:

$\Delta = 8 > 0$ e as raízes $x' = 2 + \sqrt{2}$ e $x'' = 2 - \sqrt{2}$

Então podemos concluir que: (Indagar os alunos para que cheguem a essa conclusão e só depois escrever a sentença abaixo)

→Δ > **0**, a equação possui duas raízes reais e diferentes. A parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos.



Agora vamos fazer a mesma coisa com outra função quadrática.

f(x) = x^2 - 4 x + 4.

Vamos digitá-la no Geogebra, achar seu gráfico e observar o que podemos falar sobre as raízes desta função? São iguais ou diferentes? (resposta: iguais) Quantas e quais são elas? (resposta: 2 - 2)

Em seguida usar a fórmula de Bháskara e achar:

f(x) = x^2 - 4 x + 4   f(x) =0

x^2 - 4 x + 4=0

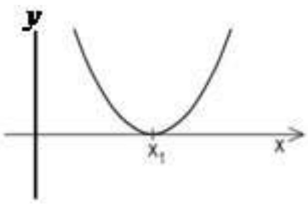
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$X = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2.1}$ $x' = \frac{4+0}{2} = 2$ $x'' = \frac{4-0}{2} = 2$

Atenção: Repetir o procedimento com outras funções quadráticas em que $\Delta = 0$.

Concluir: (Indagar os alunos para que cheguem a essa conclusão e só depois escrever a sentença abaixo)

→Δ = **0**, a equação possui apenas uma raiz real. A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.



Agora vamos fazer a mesma coisa com outra função quadrática.

f(x) = $-5x^2$ +2x -1.

Vamos digitá-la no Geogebra, achar seu gráfico e observar o que podemos falar sobre as raízes desta função? Existem ou não? (resposta: não toca o eixo x).

Em seguida usar a fórmula de Bháskara e achar:

$f(x) = -5x^2 + 2x - 1.$ $f(x) = 0$

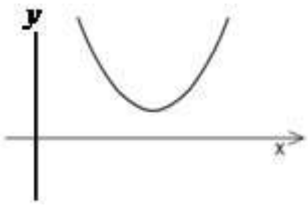
$-5x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 .(-5) .(-1) = -16 < 0$

Atenção: Repetir o procedimento com outras funções quadráticas em que $\Delta < 0$.

Então concluir: (Indagar os alunos para que cheguem a essa conclusão e só depois escrever a sentença abaixo)

→ Δ **< 0**, a equação não possui raízes reais. A parábola não intercepta o eixo x.

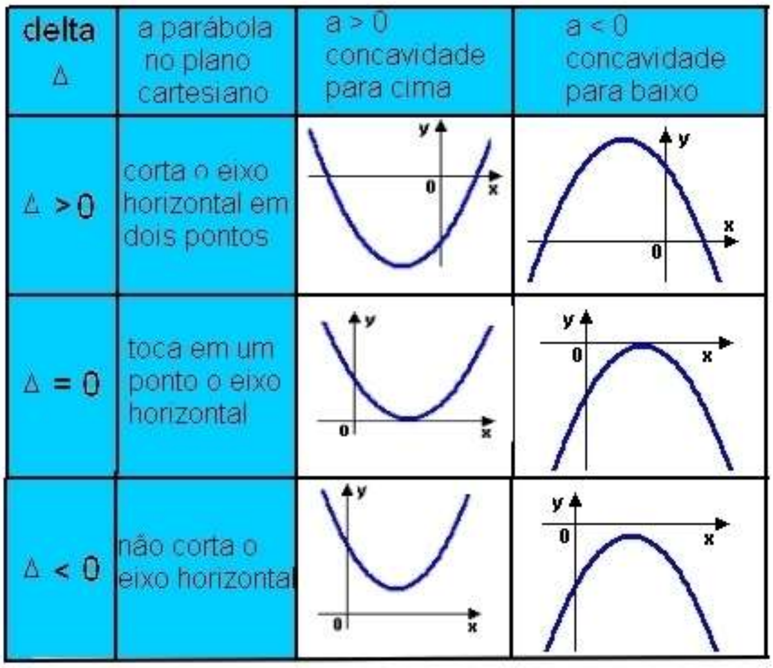


Aproveitar os gráficos construídos e chamar a atenção para os valores do coeficiente a já falados na atividade anterior.

Voltar as construções e observá-lo: o que podemos concluir em relação a função quadrática:

- $f(x) = x^2 + x - 6$, com $a = 1 > 0$? Como ficou a concavidade da parábola?(resposta: para cima).
- $f(x) = x^2 - 4x + 4$, com $a = 1 > 0$? Como ficou a concavidade da parábola?(resposta: para cima).
- $f(x) = -5x^2 + 2x - 1$, com $a = -5 < 0$? Como ficou a concavidade da parábola?(resposta: para baixo).

Assim podemos concluir que:



Fonte: http://blog.educacional.com.br/profaleveiga/2011/10/25/revisao-180-e-181-funcao-quadratica, acessado em 28/08/2012.

Será que existe como achar as raízes pela forma canònica? Vamos usar a função quadrática:

$f(x) = 2x^2 – 4x -6$, cuja a forma canônica é $f(x) =2 (x-1)^2-8$

Atribuindo 0 a f(x), obtemos a equação do 2º grau $2 (x-1)^2-8= 0$.

Resolvendo essa equação, teremos:

$2 (x-1)^2-8= 0$

$(x-1)^2 = \frac{8}{2}$

$(x-1) = \sqrt{\frac{8}{2}}$

$x- 1 = \pm 2$

$x' = 2 +1 = 3$

$x'' = -2 +1 = -1$

Ajudar os alunos a passar a equação para forma canônica.

Portanto os zeros da função quadrática são x’= 3 e x”= -1.

Exercícios de fixação:

Questão 1: Descritor H 57 C1

Bianca e Luana adoram colecionar figurinhas. As duas juntas compraram 12 pacotes de figurinhas. Sabendo que Luana comprou uma quantidade de pacotes de figurinhas que equivale à quantidade de Bianca elevada ao quadrado, quantos pacotes de figurinhas comprou Bianca?

a) 3
b) 9
c) 4
d) 16
e)

Solução:
Bianca: x
Luana: x^2
As 2 junta: $x^2 + x = 12$, resolvendo temos

$x^2 + x - 12 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 .(1) .(-12)$
$\Delta = 1 + 48 = 49$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2.1}$ $x' = \frac{-1+7}{2} = 3$ $x'' = \frac{-1-7}{2} = -4$ (descartada pois não existe quantidade negativa de figurinhas)

Logo, Bianca comprou 3 pacotes de figurinhas. Alternativa C.

Questão 2: **Descritor H57 C1**
A função $f(x) = - x^2 - 6x - 9$ possui como zeros os valores:

a) $x' = 1$ e $x'' = 1$
b) $x' = -3$ e $x'' = -3$
c) $x' = 1$ e $x'' = -3$
d) $x' = -1$ e $x'' = 3$

Incentivar os alunos a resolver pela forma canônica. Ajudar os alunos a passar a equação para forma canônica.

Solução:
Vamos fazer pela forma canônica:
$a = -1$
$m = - b/2a = -(-6)/-2 = -3$
$f(m) = -(-3)^2 - 6. -3 - 9 = - 9 + 18 - 9 = 0$

$f(x) = -1(x+3)^2 + 0$, fazendo $f(x) = 0$, temos
$-1(x+3)^2 + 0 = 0$
$-1(x+3)^2 = 0$
$(x+3)^2 = 0$
$x + 3 = 0$
$x = -3$ logo $x' = x'' = -3$, opção b.

Questão 3: **Descritor H57 C1**

Certa doença atinge uma comunidade e o número de pessoas infectadas varia de acordo com a função $Q(d)= -d^2 +100d -1600$ sendo d o número de dias desde o início desde diagnóstico inicial.

Em quantos dias 900 pessoas serão infectadas?

a) 7
b) 20
c) 25
d) 50
e) 80

Solução:

$Q(d)= -d^2 +100d -1600 = 900$

$-d^2 +100d -1600-900 = 0$

$-d^2 +100d -2500 = 0$

$\Delta = 100^2 – 4 .(-1) .(-2500)$

$\Delta = 10000 - 10000 = 0$

$x= \frac{-100 \pm \sqrt{0}}{2.-1}$ $x' =x'' = \frac{-100}{2.-1} = 50$ Logo, 900 pessoas serão infectadas em 50 dias. Alternativa D .

Fonte:Avaliação Diagnóstica Saerjinho 2º Bimestre de 2011.2ª série do E. Médio.

- **AVALIAÇÃO:**

Nesta atividade os alunos serão avaliados no decorrer das construções no Geogebra através de suas observações para ver se conseguiram associar o coeficiente a à concavidade da parábola e se reconheceram a parábola como a curva que representa a Função Quadrática . Também serão avaliados ao resolverem os exercícios de fixação propostos que recaem na resolução de uma equação do 2º grau da forma $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq0$ (**H57 C1**), no uso da forma canônica para determinar os zeros da função quadrática.E se conseguiram utilizar a função do 2º grau para resolver situações problemas.

Atividade 3

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Representar graficamente uma função do 2º grau. Compreender o significado dos coeficientes de uma função do 2º grau. Relacionar os coeficientes de uma função do 2º grau a sua representação gráfica (**H62 C3**). Reconhecer graficamente uma função do 2º grau em uma situação-problema (**H62 C2**).

- **PRÉ-REQUISITOS:** Equação de 2º grau; Zeros da função quadrática; Coeficientes a, b e c da função quadrática. Representação gráfica da Função de 2º grau através da parábola. Trinômio quadrado perfeito, Quadrado da soma e Quadrado da diferença.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Papel quadriculado**,** notebook, software Geogebra, projetor multimídia e folhas de atividades do roteiro 3 adaptadas**.**

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Alunos dispostos em trios.

- **OBJETIVOS:** Resolver as equações de 2º grau utilizando a fórmula de Bháskara e a forma canônica; Relacionar a concavidade da parábola e o coeficiente a; Identificar o ponto (0,c) como o ponto em que a parábola intersecta o eixo y; Perceber que o vértice da parábola corresponde ao ponto extremo da função quadrática. Utilizar os zeros da função quadrática para auxiliar na construção do gráfico da função. Reconhecer a importância do vértice (x_v, y_v) na representação gráfica da função quadrática. Calcular o vértice da parábola pela forma canônica.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Já aprendemos nas atividades anteriores que a representação gráfica de uma função do 2º grau ou função quadrática é uma curva chamada parábola.
Já observamos que esta toca o eixo das abscissas (eixo X) nos zeros ou raízes da função e que sua concavidade ficará voltada para cima (a>0) ou para baixo (a<0)

Mas será que só com esses dados podemos construir no papel quadriculado o gráfico da função quadrática?

Vamos então usar uma função da atividade anterior para tirarmos a prova. (Copiar a função e sua resolução da atividade 2 deste plano de trabalho)

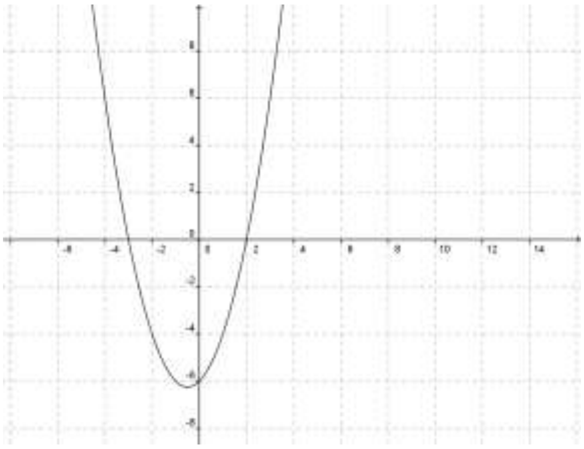
$f(x) = x^2 + x - 6 \rightarrow f(x) = 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \quad a = 1 \quad b=1 \quad c= -6$

$\Delta = 1^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, -6 = 25 > 0$ (positivo)

X = $\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2.1}$ x’ = $\frac{-1+5}{2}$ = 2 x” = $\frac{-1-5}{2}$ = -3, como a = 1 > 0 a concavidade da função estará voltada para cima.Vamos marcar no papel quadriculado o gráfico.(Deixar os alunos tentarem fazer o gráfico)

Agora vamos fazê-lo no Geogebra e comparar com o do papel quadriculado.

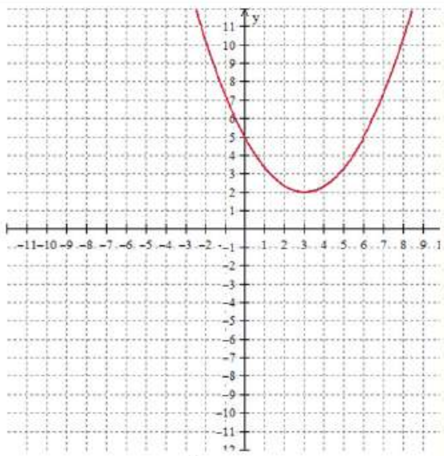


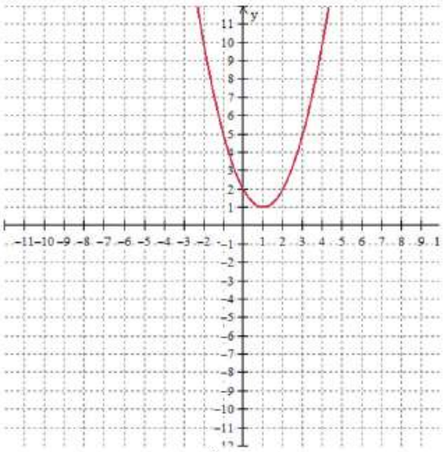
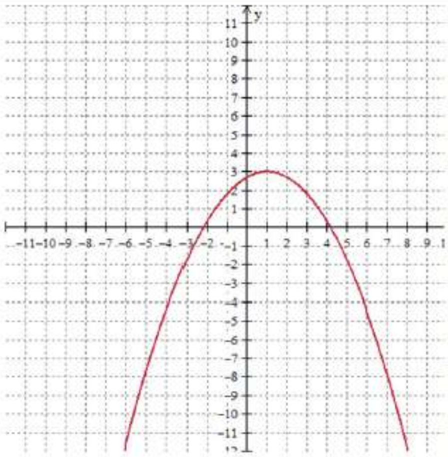
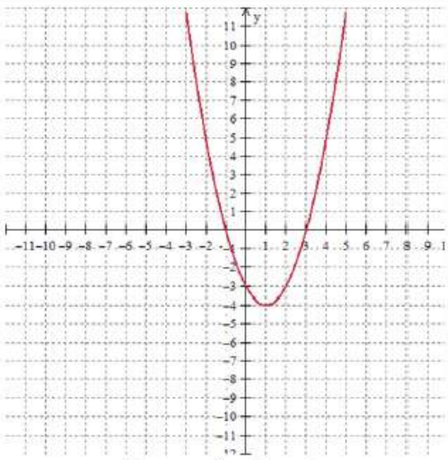
Questionamentos: Seus gráficos tocaram o eixo y no mesmo ponto que o do gráfico do Geogebra? Cortaram o eixo x nos mesmos pontos? A concavidade da parábola confere? Ele trocou de direção no mesmo ponto?

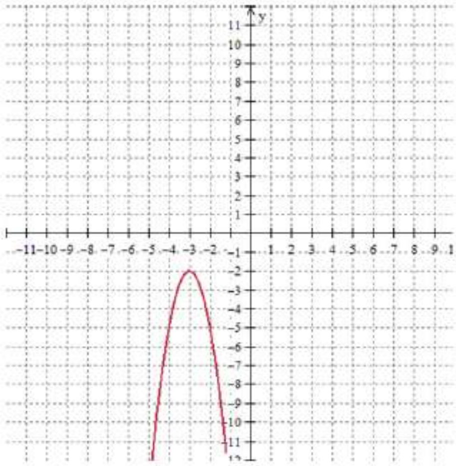
E então, será que temos como fazer em papel um gráfico do mesmo modo que no programa Geogebra?Vamos fazer alguns exercícios para descobrir.

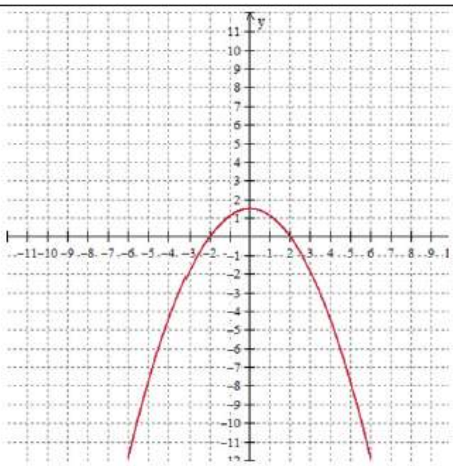
Vamos identificar o ponto em que cada parábola intersecta o eixo vertical e o valor do coeficiente das funções quadráticas. (Utilizar uma parte das atividades do roteiro 3, pois ela permite que o aluno construa suas hipóteses à respeito deste assunto).

Vamos às atividades seguintes.

	Gráfico e Lei Algébrica	Ponto de interseção entre a parábola e o eixo y	Coeficiente c
I	 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+5$		

II	 $f(x)=x^2-2x+2$		
III	 $f(x)=-0,3x^2+0,6x+2,7$		
IV	 $f(x)=x^2-2x-3$		

V	 $f(x) = -3x^2 - 18x - 29$		

VI	 $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}$		

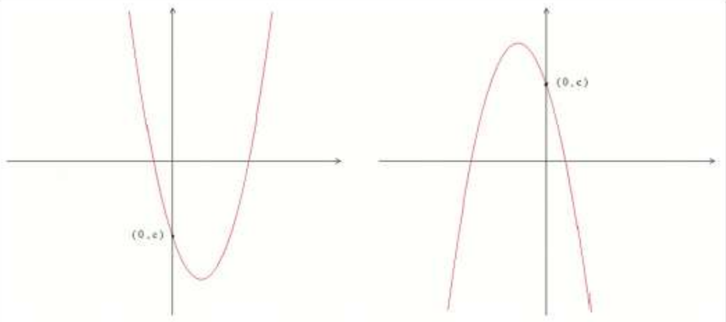
É possível que você tenha encontrado alguma dificuldade para determinar o ponto de interseção da parábola VI com o eixo y... Observando as outras parábolas, tente descobrir uma relação entre as duas últimas colunas da tabela. Não deixe de trocar ideias com seus colegas!

Verifique se a relação observada pode ajudar na determinação dos pontos referentes à parábola VI.

a) Você seria capaz de escrever uma relação entre o coeficiente e a ordenada (y) do ponto de interseção entre a parábola e o eixo y? Tente!

(Estimular os alunos a formularem sua teoria sobre tal relação em dupla e com a ajuda do professor- mediador, depois apresentar a seguinte sistematização)

Na função quadrática, de forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde *a*, *b* e *c* são os coeficientes, o coeficiente é a ordenada do ponto em que a parábola que representa essa função intersecta o eixo y. A figura a seguir exibe esta relação.



(incentivar os alunos a falarem sobre suas observações e as conclusões apresentadas)

Voltando questão inicial, já temos mais um dado para a construção de nosso gráfico.

$f(x) = x^2 + x - 6 \rightarrow f(x) = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$ a = 1 b=1   c= -6

$\Delta = 1^2 - 4 . 1 . -6 = 25 > 0$ (positivo)

$X = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.1}$

As raízes: $x' = \frac{-1+5}{2} = 2$ e $x'' = \frac{-1-5}{2} = -3$

A concavidade a = 1 a> 0, concavidade voltada para cima.

O ponto onde a parábola corta o eixo das ordenadas P(0, c)= (0, -6).

Só nos resta achar as coordenadas do vértice da parábola.

Podemos calcular o vértice da parábola utilizando as fórmulas a seguir:

$Xv = -\frac{b}{2a}$ e $Yv = -\frac{\Delta}{4a}$

$f(x) = x^2 + x - 6$

$Xv = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2.1} = -\frac{1}{2}$ e $Yv = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25}{4.1} = -6,25$ Logo temos o vértice $(-\frac{1}{2}, -6,25)$.

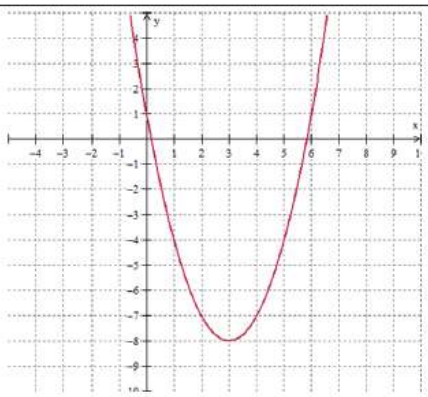
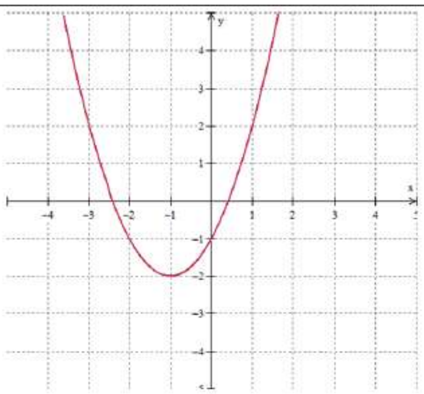
Agora, com que aprendemos podemos construir o gráfico com todas as coordenadas certas.

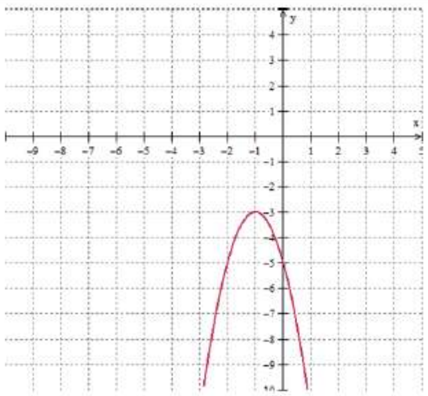
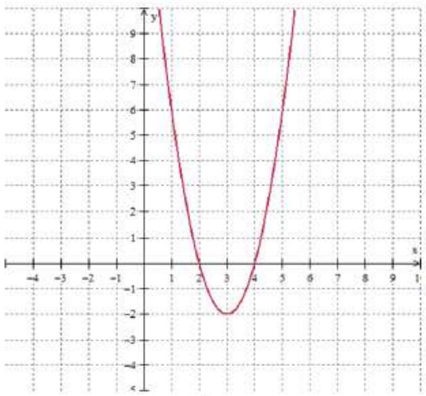
Concluindo: Com esses dados podemos construir o gráfico das funções quadráticas.

Será que existe outra forma de achar as coordenadas do vértice?

Vamos às atividades seguintes e descobrir: (usar uma parte das atividades do roteiro 5 , pois esta permite associar m e k ao vértice da parábola)

Vamos agora observar os gráficos de algumas funções quadráticas dadas na forma geral e na forma canônica. Complete a tabela abaixo:

Função Quadrática	*a*	*b*	*c*	*m*	*k*	Vértice
 $f(x)=x^2-6x+1$ $f(x)=(x-3)^2-8$						
 $f(x)=x^2+2x-1$ $f(x)=(x+1)^2-2$						

 $f(x)=-2x^2-4x-5$ $f(x)=-2(x+1)^2-3$						
 $f(x)=2x^2-12x+16$ $f(x)=2(x-3)^2-2$						

O que você percebeu? Debata com seus colegas e relate aqui. A seguir, responda às perguntas:

a) Observe as colunas m, k e vértice. O que você pode observar de relação entre o vértice e a forma canônica da função quadrática?
b) Como aprendemos calcular anteriormente o vértice da função quadrática na forma geral? (usando a fórmula do x_v e y_v)
c) Qual das duas maneiras é mais fácil?
   (Após as observações dos alunos mediadas pelo professor sistematizar)
   Concluindo:
   Na forma canônica o **m** representa o x_v e o **k** o y_v. E fazendo f(x) = 0 achamos o ponto P(0,c), onde a curva toca o eixo y.

- **AVALIAÇÃO:**

Os alunos serão avaliados durante toda a atividade, através de suas indagações e suposições se conseguiram relacionar os coeficientes de uma função do 2º grau a sua representação gráfica (**H62 C3**). E se conseguiram reconhecer graficamente uma função do 2º grau em uma situação-problema (**H62 C2**), bem como se conseguiram através da forma canônica determinar o vértice da parábola.

Atividade 4

- **HABILIDADE RELACIONADA:** Resolver problemas envolvendo o cálculo de máximos e mínimos. C4 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do yv como o valor máximo em uma função do 2º grau. C5 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do yv como o valor mínimo em uma função do 2º grau. C6 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do xv, que fornece o valor máximo de uma função do 2º grau. C7 - Resolver problemas que envolvam a determinação do valor do xv, que fornece o valor mínimo de uma função do 2º grau

- **PRÉ-REQUISITOS:** Equação de 2º grau; Zeros da função quadrática; Coeficientes a, b e c da função quadrática. Representação gráfica da Função de 2º grau através da parábola. Determinação das coordenadas do vértice da parábola seja na forma canônica ou geral.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos (2 tempos de 50 minutos).

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Situação problema motivadora retirada de livro didático do aluno.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Alunos dispostos em duplas.

- **OBJETIVOS:** Identificar yv como o valor mínimo em uma função do 2º grau. Identificar yv como o valor máximo em uma função do 2º grau. Relacionar o valor do coeficiente a ao ponto máximo ou mínimo da Função de 2º grau.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Apresentação da seguinte situação problema: Este ano tivemos um evento muito importante para o esporte e ginástica mundiais. As olimpíadas. Nela tivemos futebol, vôlei, basquete, lançamento de dardo, etc., vários esportes que envolvem lançamento. Como dito anteriormente parábola significa lançamento(chute), então vamos resolver uma situação problema relacionada a esse assunto. Antes uma curiosidade:

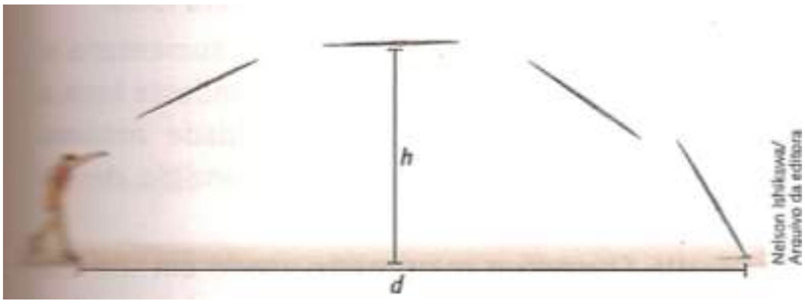
"As primeiras edições dos Jogos Olímpicos ocorreram na Grécia no período de, aproximadamente, 2500 a.C. a 393 d. C. Realizados a cada quatro anos, eles são chamados de Jogos Olímpicos da Era antiga. Depois de um longo período sem a realização dos jogos, a primeira edição da Era Moderna, também realizada na Grécia, aconteceu na cidade de Atenas, em 1896. A partir de então, os jogos continuaram a ser realizados a cada quatro anos em diferentes cidades por todo o mundo.

No decorrer das edições dos Jogos Olímpicos, alguns esportes foram excluídos, outros incluídos e muitos sofreram alterações em suas regras. Dentre os esportes que estão presentes nos Jogos Olímpicos desde a antiguidade, podemos citar o lançamento de dardo, no qual cada atleta deve lançar um dardo mais longe possível. ”

Então vamos lá:

Situação problema:

O recorde olímpico no lançamento de dardo pertence ao norueguês Andreas Thorkildsen, nascido em 1982, que nas Olimpíadas de Pequim em 2008, atingiu a marca de 90,57m de distância. Ao ser lançado por um atleta, o dardo descreve uma trajetória aproximadamente parabólica, ou seja, uma trajetória que pode ser descrita por uma parábola.



Sabendo que a trajetória do lançamento do dardo pode ser descrita pela parábola que representa a função $f(x) = -\frac{1}{88}x^2 + x$, sendo x a medida em metros.

a) Calcular a distância d obtida nesse lançamento?
b) Qual a altura máxima *h* atingida pelo dardo?

Fonte: Ciências, Linguagem e Tecnologia - Matemática 1º ano Ed. scpione Autor: Jackson Ribeiro

Solução:

a) Para resolvermos essa situação teremos primeiro que determinar a distância do atleta ao local onde o dardo caiu. Para calcular a distância precisamos de dois pontos. Para isso calculamos os zeros da função.

Assim, $f(x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{88}x^2 + x = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\,(-\frac{1}{88}).\,0 = 1$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1}}{2\cdot -\frac{1}{88}} = \frac{-1\pm 1}{-\frac{1}{44}} \rightarrow x' = 0$ e $x'' = 88$

$d = x'' - x' = 88 - 0 = 88$

b) Observando o gráfico podemos ver que altura máxima que o dardo atinge corresponde à distância que este se desloca no eixo y. Observando a parábola podemos notar que ele sobe e desce num ponto determinado. O vértice. Então vamos calcular o y_v:

$h = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{88}\right)} = 22$ m

De acordo com o valor do coeficiente a de uma função quadrática, temos:

1º caso: Se $a > 0$, a parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para cima. Dessa forma, a função possui um **ponto de mínimo** dado pelo vértice $V(x_v, y_v)$, e o **valor mínimo** correspondente à ordenada y_v.

- **Neste caso, o conjunto imagem é dado por: Im(f) = $\{y \in R \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$**

Exemplo:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

- Concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$.
- Vértice: $V(3, -1)$
- Ponto de mínimo: $V(3, -1)$
- Valor mínimo: $y_v = -1$
- $Im(f) = \{y \in R \mid y \geq -1\}$

Fazer o gráfico no Geogebra.

2º caso: Se $a < 0$, a parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para baixo. Dessa forma, a função possui um **ponto de máximo** dado pelo vértice $V(x_v, y_v)$, e o **valor máximo** correspondente à ordenada y_v.

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- Concavidade para baixo, pois $a = -1 < 0$.
- Vértice: $V(1, 4)$
- Ponto de mínimo: $V(1,4)$
- Valor mínimo: $y_v = 4$
- $Im(f) = \{y \in R \mid y \leq 4\}$

Fazer o gráfico no Geogebra.

Também podemos obter o valor de máximo ou de mínimo de uma função quadrática utilizando sua forma canônica.

Vamos considerar a função quadrática $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 12$ cuja forma canônica é $f(x) = (x - 2)^2 - 16$.

Na forma canônica de f, podemos observar que $(x - 2)^2$ é maior ou igual a zero para todo $x \in R$, sendo igual a zero quando $x = 2$. Logo, o menor valor de $f(x)$ é $f(2) = -16$.

De modo geral:

Dada a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$ de uma função quadrática qualquer, temos:

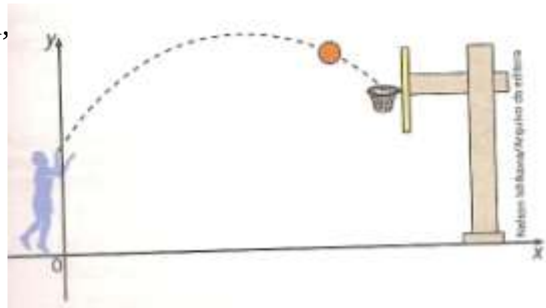
- Se **$a > 0$**, o **menor** valor de $f(x)$ é $k = f(m)$

- Se **a < 0**, o **maior** valor de f(x) é k = f(m)

Exercícios de fixação:

Questão 1: **Descritor H57 C5**

Um jogador de basquete arremessa uma bola cujo centro segue a trajetória plana da função $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2$, sendo x e y dados em metros. Suponha que esse jogador acerte o arremesso, e o centro da bola, na descida, 3 m de altura.



a) Determine a distância, em metros, do centro da cesta ao eixo y.
b) Qual foi a altura máxima atingida pela bola?
c) Você acha difícil acertar uma cesta à distância obtida no item a? Justifique.

Fonte: Ciências, Linguagem e Tecnologia - Matemática 1º ano Ed. scpione Autor: Jackson Ribeiro

Solução:

a) Vamos calcular a distância pedida.

$y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2 \rightarrow -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2 = 3$

$-\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x - 1 = 0 \rightarrow -x^2 + \ x - 7 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2.-1} = \frac{-8 \pm 6}{-2}$

$x' = \ 4 + 3 = 7$

$x'' = 4 - 3 = 1$

$d = x' - x^o = 7 - 0 = 7$

Portanto, a distância é de 7 m .

b) Chamando y de f(x), temos que :f(1) = f(7) = 3, logo x_v é dado por $x_v = x = \frac{1+7}{2}$

$= 4$, assim , $f(4) = -\frac{1}{7}.4^2 + \frac{8}{7}.4 + 2 = 4{,}29$

Portanto a altura máxima atingida pela bola é de aproximadamente 4,29m.

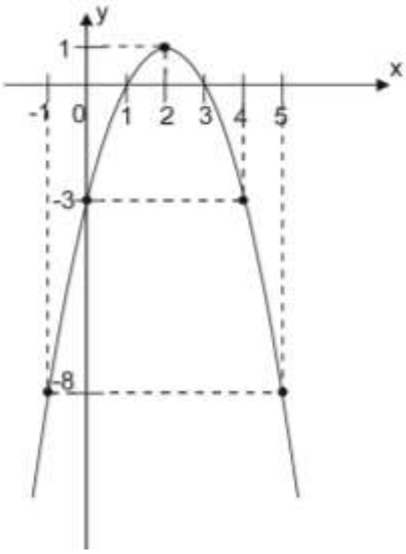
Questão 2: **Descritor H57 C4**

Exemplo de item:

Observe o gráfico ao lado.

A função apresenta ponto de

(A) mínimo em (1,2).
(B) mínimo em (2,1).
(C) máximo em (-1,-8).
(D) máximo em (2,1).
(E) máximo em (1,2).



Fonte: Matriz saeb, acessado em 28/07/2011.

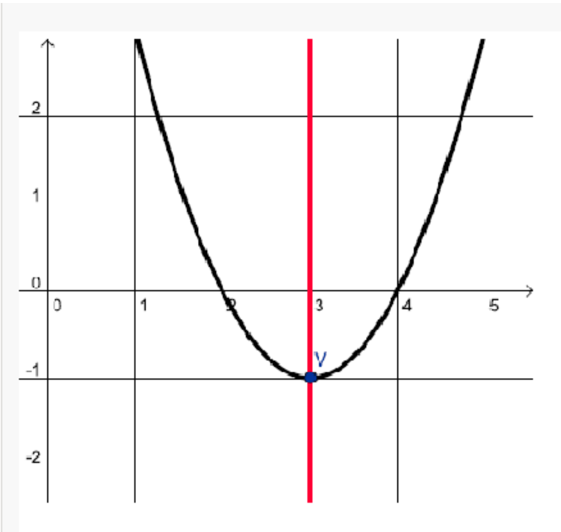
Solução:

Como a parábola tem a concavidade para baixo, seu ponto é máximo e representado pela coordenada do vértice(2,1).

Questão 3: **Descritor H62 C2 e C3**

De acordo com o gráfico ao lado, responda:

a) O valor do coeficiente a>0 ou a<0?
b) O valor do Δ>0 ou Δ<0?
c) Quantos e quais são os zeros desta Função?
d) Qual o Xv desta função? E qual o Yv?
e) Esta função polinomial de 2º grau tem ponto de valor máximo ou mínimo? Qual é ele?



Solução:

a) Como a parábola tem a concavidade para cima então a > 0.
b) O $\Delta > 0$, pois a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos.
c) Esta função quadrática possui 2 zeros :x' = 2 e x" = 4.
d) O Xv = 3 e o Yv = -1.
e) Ponto de mínimo, pois a>0, concavidade para cima. Ponto mínimo = V(3, -1)

- **AVALIAÇÃO:**

Será realizada durante toda a aula. Será verificado se os alunos conseguiram resolver problemas envolvendo o Yv como valor mínimo ou como valor máximo, se eles compreenderam que dependo do valor do coeficiente a a função terá ponto máximo ou mínimo(H 57 C4 e C5).

AVALIAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO

Este plano de trabalho foi confeccionado com o objetivo de tornar mais concreta e significativa a aprendizagem do conteúdo Função Polinomial de 2º Grau de Matemática do 3º bimestre do 1º ano do Ensino Médio.

Através de atividades dinâmicas e contextualizadas, buscou-se o desenvolvimento de uma aprendizagem mais significativa.

Para os alunos o plano de trabalho foi inovador e conseguiu despertar a atenção da maioria destes. Eles acharam a proposta interessante e participaram ativamente das atividades propostas, através da construção de curvas no Geogebra, realização das tarefas e expressando suas opiniões nos questionamentos. Ficaram um tanto quanto receosos quanto a forma canônica, uma vez que todos preferem a forma geral, pois sabem resolver a equação do 2º grau.

De um modo geral podemos dizer que as ações propostas alcançaram 70% ou mais dos alunos.

Pode-se concluir que o Plano de Trabalho é compatível com a estrutura da escola, já que não foi utilizado nenhum tipo de recurso que estive disponível na mesma.

Eu senti-me muito bem executando o plano de trabalho, uma vez que os alunos demonstram um interesse maior nas atividades diversificadas.

Como pontos negativos cito o pouco tempo para elaboração e execução do plano de trabalho, visto que nesta semana do dia 3 a 7 de Setembro temos 2 dias sem aula, por causa do feriado e do Desfile Cívico que aqui em minha escola é dia 4 de setembro.

Como ponto positivo destaco o interesse dos alunos nas tarefas.

Para neutralizar os pontos negativos sugiro mais alguns dias com esse trabalho para reforçar os conceitos estudados bem como uma revisão geral de conteúdos relativos à função quadrática.

Referências bibliográficas

RIBEIRO, J. **Ciência, Linguagem e Tecnologia** – **Matemática –** São Paulo**:** editora scipione, 2012.

ROTEIROS DE AÇÃO - **Função Polinomial de 2º Grau – Curso de Aperfeiçoamento** oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 – disponível em HTTP://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 15/08/2012.

Vídeo Esse tal Bháskara - **Curso de Aperfeiçoamento** oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012 – disponível em HTTP://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 15/08/2012.

Avaliação Diagnóstica Saerjinho 2º Bimestre de 2011.2ª série do E. Médio, disponível em arquivo do Colégio Estadual Nicoláo Bastos Filho.

Endereços eletrônicos acessados de 24/08/2012 a 02/09/2012, citados aos longo do Plano de Trabalho

[1] **Variação da função quadrática** disponível em http://www.uff.br/cdme/quadratica/quadratica-html/QP4.html acessado em 31/08/2012.

[2] **Concavidade de uma parábola** disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/concavidade-uma-parabola.htm acessado em 23/08/2012.

[3] **Matriz Saeb**, disponivel em http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf acessado em 28/07/2011.

[4] **Unicanto- Lista de Exercícios Função de 2º Grau** disponível em http://www.supletivounicanto.com.br/docs/matematica/funcao_2_grau.pdf acessado em 26/08/2012.

[5] VEIGA, A. **Revisão da função quadrática - Blog do professor** disponível em http://blog.educacional.com.br/profaleveiga/2011/10/25/revisao-180-e-181 acessado em 28/08/2012.

[6] **Módulo Didático de apoio à atividade docente para o CRV**, disponível em http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/EM_Funcao_do_segundo_grau.pdf acessado em 24/08/2012.