INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC - RJ
Tutora: Ana Paula
Cursista: Marta Cristina de Oliveira
Matrículas: 09137050 / 09269929
Grupo 1
Plano de trabalho 2

Colégio: CiepBrizolão 152 Garrincha Alegria do Povo
Professora: Marta Cristina de Oliveira
Série: 2º ano Regular   Ensino Médio   1º bimestre / 2013

PLANO DE TRABALHO

Assunto: Introdução à Geometria Espacial

Introdução:

Este plano de trabalho visa ao incentivo do aluno ao estudo de Geometria Espacial. É importante sensibilizar o aluno para o valor do seu estudo na solução de problemas do uso cotidiano e proporcionar-lhe, entretanto, condições para a sua aprendizagem. Os alunos são expostos a pouquíssimas situações que ilustrem a aplicação dos conteúdos matemáticos à vida diária.

A fim de suprir esta deficiência e não apresentar o conteúdo de forma assustadora, este plano de trabalho mostra algumas situações em que se aplica no dia a dia. Querendo sensibilizar os alunos para sua importância, estimulando o seu desenvolvimento nesse cálculo.

Além disso, faz uma abordagem sobre Geometria Espacial, onde haverá necessidade de reforçar o estudo sobre polígonos.

Desenvolvimento:

Atividade 1 – Conhecendo **Geometria Espacial**

Habilidade relacionada:
Compreender os conceitos primitivos da
Reconhecer as posições de retase planos no espaço.
Resolver problemas envolvendo geometria espacial.

Pré-requisitos: Tipos de polígonos

Tempo de Duração: 200 minutos.

Recursos Educacionais Utilizados: Quadro, caneta, explicações e lista de exercícios como ferramenta para a fixação de conteúdos.

Organização da turma: Individualmente ou em grupo.

Objetivos: Desenvolver as habilidades relacionadas a Geometria espacial.
Fixação dos conhecimentos através de exercícios.
Mostrar a importância do assunto e sua aplicação no dia a dia.

Metodologia adotada:
Precisamos justificar o estudo de Geometria Espacial como forma de representar dados para a resolução de problemas.
Utilizar a aula expositiva para introduzir o assunto.
Propor a resolução de exercícios referentes ao cotidiano do aluno e corrigi-lo para eliminar as dúvidas.

Introduzir o tema mostrando o objetivo dos estudos que estão por vir.
Mostrar os tipos de problemas que podem ser resolvidos através do conteúdo e entregarpara os alunosuma folha contendo um resumo contendo os conceitos.
Apresentar o conteúdo através de exemplos simples e práticos.
Distribuir lista de exercícios.

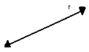
Acompanhe através do estudo as aplicações.

Geometria Espacial

Conceitos primitivos

São conceitos primitivos (e, portanto, aceitos sem definição) na Geometria espacial os conceitos de ponto, reta e plano. Habitualmente, usamos a seguinte notação:

- *pontos: letras maiúsculas do nosso alfabeto* 

- *retas: letras minúsculas do nosso alfabeto* 

- *planos: letras minúsculas do alfabeto grego* 

Explicar

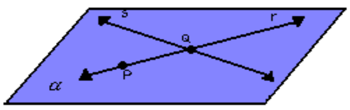
Ponto: um furo, uma estrela no céu, o centro do campo de futebol, etc. **Reta**: podemos dizer que a reta é formada por infinitos pontos, como uma caneta, uma corda esticada, lados de um campo de futebol, as traves do gol, os raios solares, etc **Plano**: a superfície de uma parede, o chão, um quadro, universo, etc.

Observação: Espaço é o conjunto de todos os pontos.
Por exemplo, da figura a seguir, podemos escrever:

$P \in r$

$Q \in s \cap r$

$s \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$



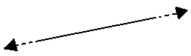
Axiomas

*Axiomas, ou postulados (**P**), são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.*

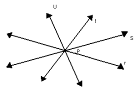
Temos como axioma fundamental:existem infinitos pontos, retas e planos.

Postulados sobre pontos e retas

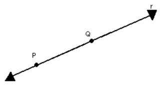
P_1)A reta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.



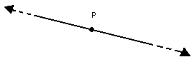
P_2)Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.



P_3) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

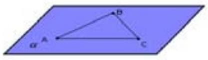


P_4) Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semi-retas.

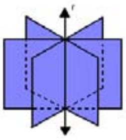


PostulPostulados sobre o plano e o espaço

P_5) Po P_5) Por três pontos não-colineares passa um único plano.
5



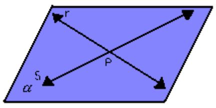
P_6) O plano é infinito, isto é, ilimitado.
P_7) Por uma reta pode ser traçada uma infinidade de planos.



P_8) Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semiplanos.*
P_9) Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços.

Posições relativas de duas retas

No espaço, duas retas distintas podem ser c*oncorrentes, paralelas ou reversas:*

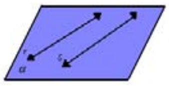


Concorrentes

$r \cap s = \{P\}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

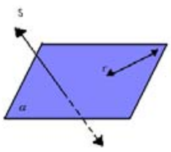


Paralelas

$r \cap s = \{\ \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$



Re *versas*

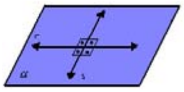
$r \cap s = \{\ \}$

não existe plano que copntenha

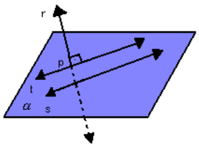
r e s simultanea mente

Temos que considerar dois casos particulares:

- retas perpendiculares: $r \perp s$



- retas ortogonais: $r \underline{\perp} s$



$r \perp t$ e $r \underline{\perp} s \Rightarrow t // s$

$t \subset \alpha$

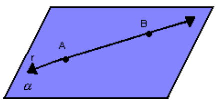
$s \subset \alpha$

Posições relativas de reta e plano

Vamos considerar as seguintes situações:

a) reta contida no plano

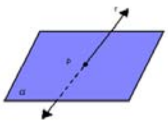
Se uma reta **r** tem dois pontos distintos num plano α, então **r** está contida nesse plano:



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \\ A \in r \text{ e } B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

b) reta concorrente ou incidente ao plano

Dizemos que a reta **r** "fura" o plano α ou que **r** e α são concorrentes em **P** quando $r \cap \alpha = \{P\}$.



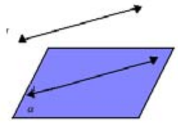
Observação: A reta **r** é reversa a todas as retas do plano que não passam pelo ponto **P**.

c) reta paralela ao plano

Se uma reta **r** e um plano α não têm ponto em comum, então a reta **r** é paralela a uma reta **t** contida no plano α; portanto, r // α

$$r // t \text{ e } t \subset \alpha \Rightarrow r // \alpha$$

Em α existem infinitas retas paralelas, reversas ou ortogonais a **r**.



P_{11}) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua intersecção é dada por uma única reta que passa por esse ponto.

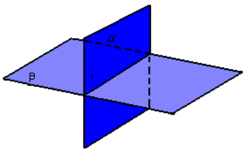
Posições relativas de dois planos

Consideramos as seguintes situações:

a) planos coincidentes ou iguais

b) planos concorrentes ou secantes

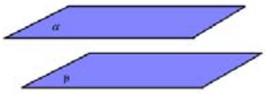
Dois planos, α e β, são concorrentes quando sua intersecção é uma única reta:



$\alpha \cap \beta = r$

c) planos paralelo

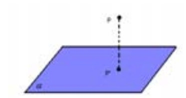
Dois planos, α e β, são paralelos quando sua intersecção é vazia:



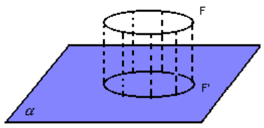
$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{\ \}$

Projeção ortogonal

A projeção ortogonal de um ponto **P** sobre um plano α é a intersecção do plano com a reta perpendicular a ele, conduzida pelo ponto **P**:

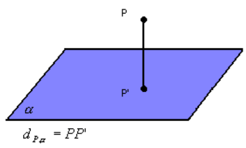


A projeção ortogonal de uma figura geométrica **F**(qualquer conjunto de pontos) sobre um plano α é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos de **F** sobre α:

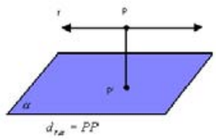


Distâncias

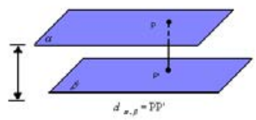
A distância entre um ponto e um plano é a medida do segmento cujos extremos são o ponto e sua projeção ortogonal sobre o plano:



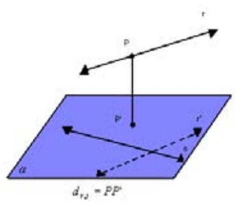
A distância entre uma reta e um plano paralelo é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano:

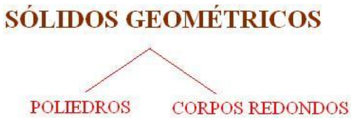


A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano:



A distância entre duas retas reversas, **r** e **s**, é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra e é paralelo à primeira reta:





Passar o vídeo para os alunos:uma vídeo-aula que apresenta Sólidos Geométricos
http://www.ocw.unicamp.br/fileadmin/user_upload/cursos/au909/CDgeo2/serverV3.swf

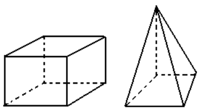
Conversar com os alunos onde podemos encontrar sólidos em nosso cotidiano? vários são os contextos em que os Sólidos Geométricos estão presente: nos esportes, na natureza, nos alimentos, nas obras de arte, etc.

Em seguida apresentar o assunto:
Nessa aula apresentar atividades que poderão servir para desenvolver a capacidade de os alunos reconhecerem os diferentes tipos de sólidos geométricos no seu cotidiano, através de atividades que utilizam o computador e/ou podem ser realizadas com objetos comuns ao seu dia-a-dia.
Para darmos início a essa aula utilizar o software Geogebra.

Começando o estudo as aplicações haverá necessidade de reforçar o estudo sobre polígonos.

Poliedros

Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja os exemplos:

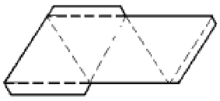
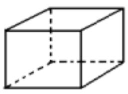
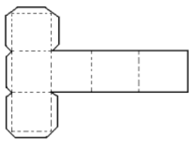
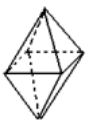
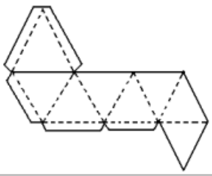


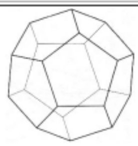
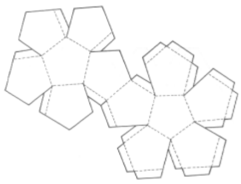
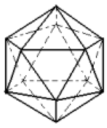
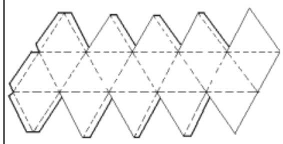
Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

Poliedros regulares

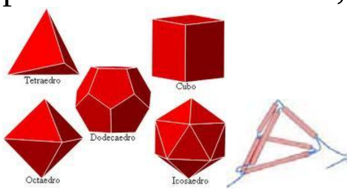
Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares:

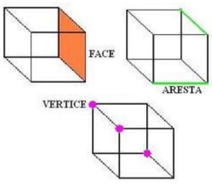
Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro: quatro faces		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 • Hexaedro: seis faces		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro: oito faces		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas

 • Dodecaedro: vinte faces		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 • Icosaedro: vinte faces		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Para que os alunos compreendam o processo, sugerir a construção de poliedros em cartolina, canudos e suas planificações.



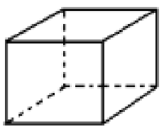
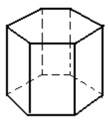
Relação de Euler



Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte:

V - A + F = 2

em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.
Observe os exemplos:

 V = 8 A=12 F = 6 8 - 12 + 6 = 2	 V = 12 A = 18 F = 8 12 - 18 + 8 = 2

Mostrarexemplos para que se compreenda como utilizar a fórmula.:

1) Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?

Como o poliedro tem 12 faces pentagonais, então: 12 .5 = 60

O poliedro tem 20 faces hexagonais, assim 20 .6 = 120,

logo: F = 12 + 20 = 32

Cada aresta foi contada duas vezes, portanto temos:2A = 60 + 120 2A = 180 A = 180/2
A = 90

Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler,V – A + F = 2, portanto:

V – 90 + 32 =2

V = 2 + 90 – 32

V = 60

Assim, o número de vértices é 60.

2) Determinar o número de arestas e o número de vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Como o poliedro tem 6 faces quadrangulares, calculamos: 6 . 4 = 24

O poliedro tem 4 faces triangulares: 4 . 3 = 12

Como cada aresta foi contada duas vezes, o número total de arestas é: A = (24+12)/2 = 18

Temos então F = 10,A = 18.

Aplicando a relação de Euler:

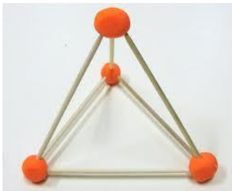
V – A + F = 2
V – 18 + 10 = 2
V = 10

Logo, o poliedro tem 18 arestas e 10 vértices.

Podemos associar objetos a Sólidos Geométricos





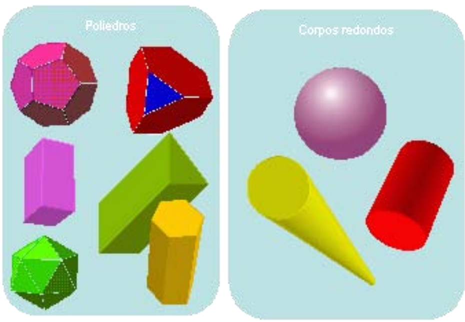



Você sabia que...

Os artistas plásticos, os arquitetos, os paisagistas usam o contraste dos corpos redondos e dos poliedros, das linhas curvas e retas, na harmonia de suas criações? Observe a beleza da Praça dos Três Poderes, em Brasília, onde se localiza o Congresso Nacional.

Como se vê, muitos desses exemplos citados acima, nos mostram que no dia a dia nos deparamos Sólidos Geométricos.

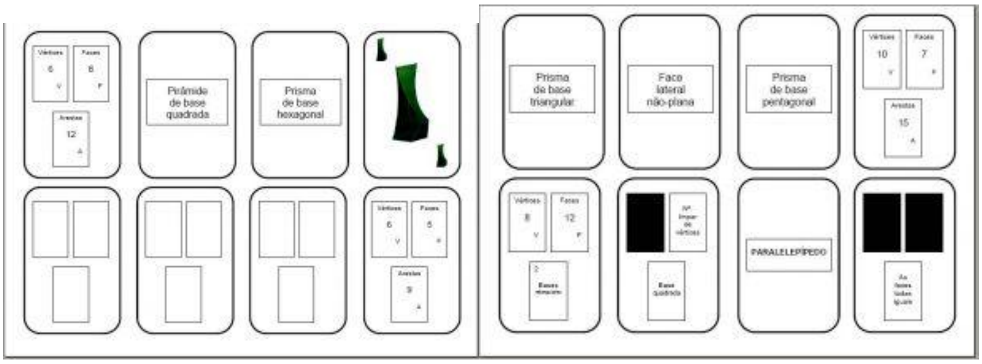
São figuras presentes no cotidiano.

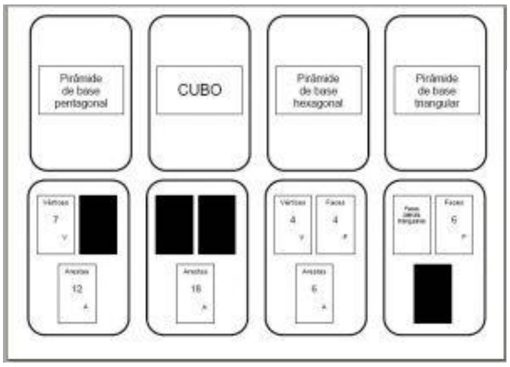


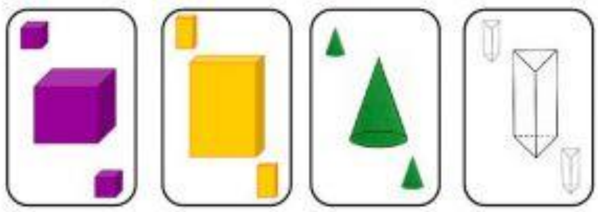
Dando sequência a identificação e classificação de sólidos no cotidiano, sugerir aos alunos que tragam de casa diferentes embalagens e objetos que podem ser identificados como sólidos geométricos para se fazer a comparação de poliedros e corpos arredondados (caixas de sabão em pó, remédios, leite, latas de milho, ervilha, dados, entre outros).

Objetivos do Jogo:

Identificar propriedades e representações de sólidos geométricos.







http://www.mathema.com.br/e_medio/jogos/poliedros/poliedro_cartas.pdf

Testando os seus conhecimentos do aluno (pode-se escolher algumas atividades para serem feitas em sala e o restante para serem feitas em casa).

Exercícios para praticar

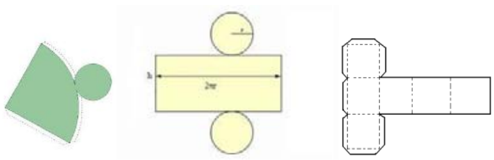
1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
a) Por um ponto passam infinitas retas.
b) Por dois pontos distintos passa uma reta.
c) Uma reta contém dois pontos distintos.
d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
a) Três pontos distintos são sempre colineares.
b) Três pontos distintos são sempre coplanares.
c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
a) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a tal que AЄQ e BЄQ.
b) Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s, se P e distinto de Q, e P e Q pertencem às retas r e s, então r = s.
c) Qualquer que seja uma reta r, existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B, com A Є r e B Є r.
d) Se A = B, existe uma reta r tal que A, B Є r.

4) Considere as figuras abaixo

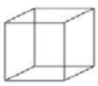
I II III



As figuras I, II e III correspondem, respectivamente, às planificações de:

a) cone, esfera e cilindro
b) cone, pirâmide e cilindro
c) cone, esfera e cubo
d) cilindro, cubo e pirâmide
e) cone, cilindro e cubo

5) Indique o número de Vértice, Aresta e Face do poliedro abaixo:



a) V = 8,A = 12 e F = 6

b) V = 8,A = 8 e F = 4

c) V = 6, A =12 e F = 5

d) V = 8, A = 2 eF = 4

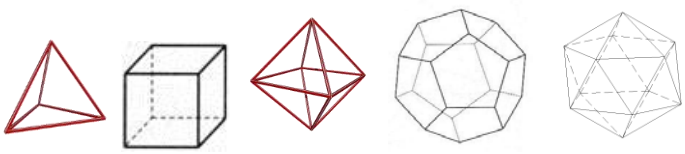
6) Os poliedros recebem nome de acordo com o número de faces que apresenta, marque a opção correta de acordo com a ordem em que eles estão apresentados:

a) tetraedro, octaedro, hexaedro, dodecaedro eicosaedro

b) tetraedro, icosaedro, hexaedro, octaedro edodecaedro

c) hexaedro, tetraedro, octaedro, dodecaedro eicosaedro

d) tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro eicosaedro



7) Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

8) (PUC –SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

a) 4 b) 12 c) 10 d) 6 e) 8

9)Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais. (resposta V = 10)

10) Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro? (resposta F = 6)

11) Um poliedro convexo tem 11 vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro. (resposta F = 11)

12) Calcule o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares de um poliedro com 20 arestas e 10 vértices. (F3 = 8 eF4 = 4)

13)(CESGRANRIO) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedroé:
a) 80 b) 60 c) 50 d) 4**e)** 36

14)(Escola Naval) Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é:
a) 60 b) 81 **c)** 100 d) 121 e) 141

15)Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedroconvexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol. Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos? (resposta 60 átomos e 90 ligações)

16) Um poliedro possui número ímpar de vértices da base, e seu número de faces laterais é a metade do número de arestas da base de um prisma hexagonal. Qual é o poliedro que estamos escrevendo?

a) pirâmide de base pentagonal
b) prisma de base triangular
c) pirâmide de base triangular
d) prisma de base pentagonal

17) Em qual das pirâmides a seguir posso associar a carta propriedade 6 faces/ faces laterais triangulares ?

a) pirâmide de base triangular
b) pirâmide de base quadrangular
c) pirâmide de base pentagonal
d) pirâmide de base hexagonal

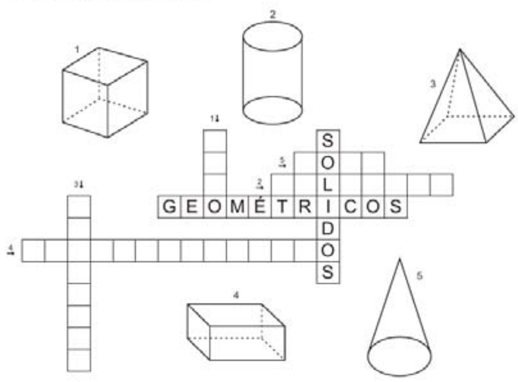
18) Das propriedades a seguir, quais podemos relacionar a um octaedro regular?

a) 10 vértices, 7 faces, 15 arestas
b) 6 vértices, 8 faces, 12 arestas
c) 6 vértices, 8 faces, 12 arestas

19) Assinale a alternativa que apresenta poliedros com número par de vértices e número ímpar de faces e arestas:

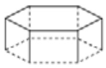
a) Prisma reto de base retangular e pirâmide reta de base
triangular
b) prisma hexagonal regular e pirâmide pentagonal regular
c) prisma triangular reto e prisma pentagonal reto
d) prisma reto de base triangular e pirâmide oblíqua de base
Triangular

PREENCHA A CRUZADINHA:



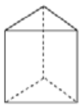
4. Associe os prismas ao número correto de faces que possuem:

a)



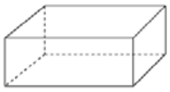
5 faces

b)



6 faces

c)



8 faces

5. Marque a resposta correta.

Os elementos de um prisma são:

( ) a) Bases, vértices, arestas.

( ) b) Bases, vértices e faces.

( ) c) Bases, vértices, arestas e faces.

Avaliação

O desempenho do aluno será avaliado considerando a participação nas atividades propostas. Será distribuído listas de exercícios, os alunos que fizerem, veremos que os objetivos foram alcançados. Caso os alunos não tenham alcançado poderemos fazer atividades extra classe.

Os alunos que participaram das atividades e não tiveram dificuldade em aplicar os conceitos, dominam bem os polígonos. Há uma grande dificuldade nesse assunto.

Aplicando este plano de trabalho voltado para a realidade do aluno, o assunto facilita a compreensão dos alunos.

Fontes de Pesquisa:

Giovanni, J.R., BONJORNO,J.R.Matemática Completa. 2.ed.renov.São Paulo:FTD,2005.384.

Site da Web:

Mathema. Poliedros. Disponível em: <http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/e_medio/sala/poliedros.html>. Acesso em: 2 de mar. de 2013.

Somatematica. Espacial. Disponível em: <www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial11.php>.Acesso em: 1 de mar. de 2013.

Profnara. Geometria Espacial. Disponível em: <http://profnara.blogspot.com.br/2012/06/trabalho-geometria-espacial-2trim1parte.html>.Acesso em: 2 de mar. de 2013.

.

Prismas. Geometria Espacial. Disponível em: <www.exatec.unisinos.br/~kessler/arquivos/prismas.doc>.Acesso em: 2 de mar. de 2013.

Matemathiques. Geometria Espacial. Disponível em: <matematiques.sites.uol.com.br/assuntos/segundo/geometprisma.htm>.Acesso em: 1 de mar. de 2013.