CURSISTA: ANA PAULA SOARES MUNIZ
TUTORA: RODOLFO GREGÓRIO DE MORAES GRUPO: 1
COLÉGIO ESTADUAL PROFESSORA VANILDE MATTOS

CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA- FUNDAÇÃO - CECIERJ

CONSÓRCIO CEDERJ

1º ANO

2014

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Trigonometria na Circunferência

Introdução

A Trigonometria é utilizada desde os tempos primórdios, na antiguidade, desde os babilônios, até pouco antes de Descartes (1596-1650 d.C.) usava-se a Trigonometria como instrumento puramente prático de agrimensura, astronomia ou navegação, pois frequentemente precisava-se calcular distâncias que não podiam ser medidas com régua ou trena,ela tornava isso possível pela simples aplicação de certas regras básicas sobre as relações entre os lados e os ângulos de qualquer triângulo, grande ou pequeno, imaginário ou não. Essas relações foram primeiramente estabelecidas pelos gregos, a fim de analisar os arcos de círculo. lllO primeiro cientista que sabemos ter aplicado tais relações foi o astrônomo Hiparco, por volta de140 a.C.

A astronomia, foi umas das grandes utilizadoras da trigonometria, onde os principais participantes foram os gregos e os egípcios. Foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da Trigonometria que são utilizados até hoje.

Hiparco,trouxe várias ideias na trigonometria que foram se desenvolvendo por meio de aplicações práticas necessárias às diferentes situações que ocorreram nas antigas civilizações e hoje se pode também calcular distâncias que não podem ser medidas manualmente utilizando-se da Trigonometria além de muitas outras aplicações.

Desenvolvimento

Objetivos Gerais;

- Conhecer e identificar a unidade de medida radiano para arcos e ângulos.
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano e grau para radiano.
- Identificar padrões periódicos de comportamento que sirvam para exemplificar, e justificar o estudo de funções periódicas.
- Conhecer nas situações do cotidiano padrões periódicos de comportamento.
- Calcular valores do seno e do cosseno no ciclo trigonométrico e analisar algumas propriedades gerais. Construir a relação fundamental da trigonometria.

Organização da classe: Turma organizada em pequenos grupos, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

Pré-requisitos:

Noções de periodicidade; conceito de função.

Arcos e ângulos na Circunferência.

Regra de Três .

Descritores associados: H02, H12, **H21**

Material necessário:

Folha de atividades fornecida pelo professor.

Notebook do professor acompanhado de projetor multimídia

Data show

Anexo das atividades no material do reforço

Deve-se enfatizar a importância dos fenômenos periódicos, uma vez que seu estudo facilita a modelagem de situações que apresentam periodicidade.

O uso da tecnologia na sala de aula não é novidade, sua utilização já está bastante comum e deve ser feita de forma natural e bem planejada, uma vez que assim o aluno pode se concentrar mais nas estratégias de resolução dos problemas (ponto de partida de nossa prática pedagógica), favorece a criatividade, facilita o registro, dinamiza a aula e permite uma melhor troca de informações. Nesse contexto, os Softwares Matemáticos cosntituem excelentes ferramentas para o ensino da Trigonometria.

Com todas essas ideias, iniciaremos nossa prática recordando conceitos já conhecidos da Geometria Plana: Arcos, ângulos , comprimento de circunferência de raio ***r*** , comprimento e medida de um arco. É muito importante que os aunosjá saibam transformar as unidades de medidas de graus para radianos e vice-versa , daí darei a primeira atividade para uma revisão.

Atividade 1: Esperto Radiano. - jogo

Tempo de duração: 2 aulas

Objetivo:

Transformar a medida de um ângulo grau para radiano ou vice-versa.

Descrição da atividade:

A atividade proposta é um jogo em que cada aluno deve juntar dois pares de ângulos iguais que estão descritos em grau e radiano.

Para facilitar a execução do jogo, utilizando as cartas que estão em suas mãos, complete a tabela a seguir. Para isto, você deve transformar cada ângulo que está em graus, para radianos. No jogo utilize a tabela para consulta:

GRAUS	TRANSFORMAÇÃO $x = \frac{\pi a}{180} rad$	RADIANOS (X)
15^0	$x = \frac{15\pi}{180} rad$	$\frac{\pi}{12} rad$
30^0	$x = \frac{30\pi}{180} rad$	$\frac{\pi}{6} rad$

45^0	$x = \frac{45\pi}{180} rad$	$\frac{\pi}{4} rad$
60^0	$x = \frac{60\pi}{180} rad$	$\frac{\pi}{3} rad$
90^0	$x = \frac{90\pi}{180} rad$	$\frac{\pi}{2} rad$

Para iniciar o jogo utilizaremos o "Baralho Angular", que está em anexo a esta dinâmica. Propomos que o número de participantes seja de 4 ou 5 participantes.

Instruções e regras:

Separe dois pares de cartas que formam ângulos para todos os participantes (ou seja, 12 cartas para três participantes, 16 cartas para quatro participantes e assim por diante, podendo chegar a 28 cartas para sete participantes), e mais uma carta coringa.

Inicia-se o jogo embaralhando as cartas.

Após embaralhar as cartas, distribua 4 delas para cada participante. Sendo assim, sobrará uma carta. Esta carta será dada ao participante que começará a partida.

Este participante deve verificar, entre as cartas de sua mão, se há alguma carta que forme par com as demais,devendo passar a carta que não tem serventia para o jogador que está à sua direita. Esta ação deve ser repetida por todos os jogadores.

A Carta Coringa, deverá ficar na mão do jogador por uma rodada. Ao recebê-la, o jogador não poderá repassá-la imediatamente. Este só poderá se livrar da mesma na próxima rodada.

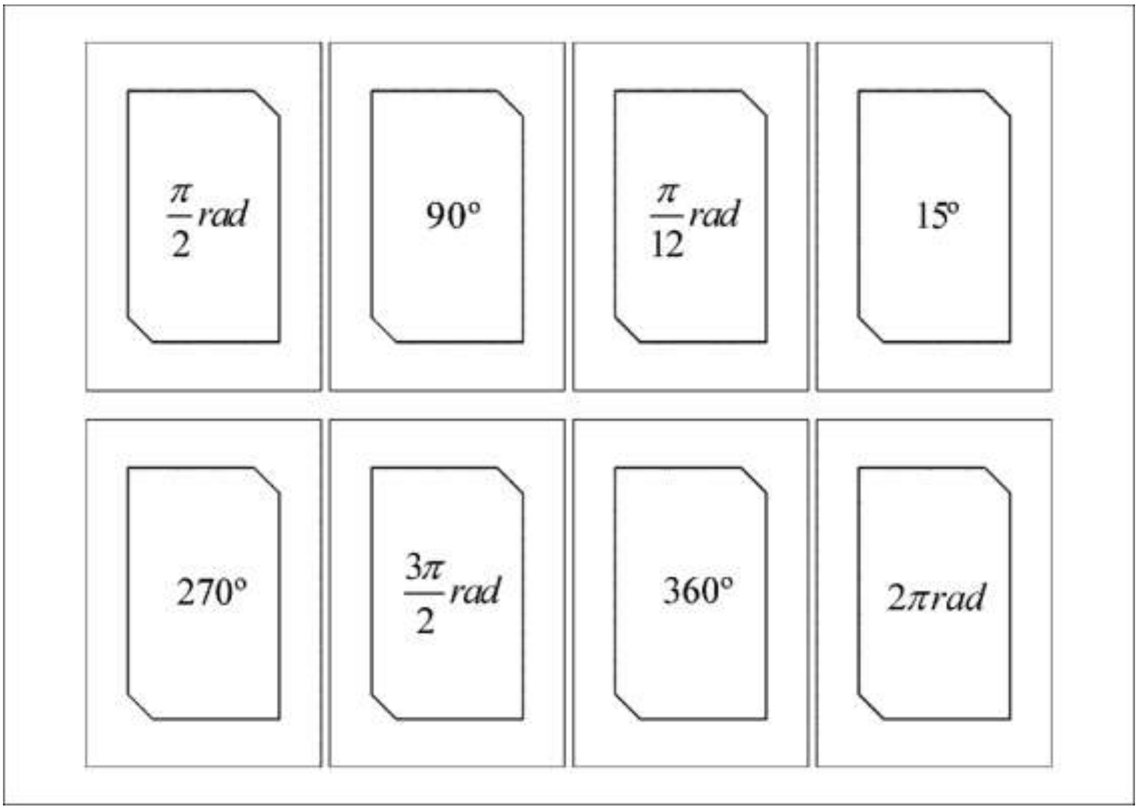
O jogo termina quando algum dos jogadores conseguir formar 2 pares de ângulos em sua mão.

Esse jogador deve, discretamente, "arriar" as cartas na sua frente e visível a todos, porém, sem chamar atenção. Os jogadores, que estiverem atentos, devem repetir o gesto (sem chamar a atenção), até que o ultimo jogador perceba.

ANEXO:

$\frac{\pi}{2}$ rad	90°	$\frac{\pi}{12}$ rad	15°
$\frac{\pi}{4}$ rad	45°	$\frac{2\pi}{3}$ rad	120°
$\frac{\pi}{3}$ rad	60°	π rad	180°
$\frac{\pi}{6}$ rad	30°	$\frac{5\pi}{3}$ rad	300°
$\frac{5\pi}{6}$ rad	150°	2πrad	360°
$\frac{3\pi}{2}$ rad	270°	$\frac{5\pi}{4}$ rad	225°

180°	$\pi\, rad$	45°	$\frac{\pi}{4} rad$
$\frac{\pi}{3} rad$	60°	$\frac{\pi}{6} rad$	30°



Atividade 2 - Explorando o Ciclo Trigonométrico.

Tempo de duração: 3 tempos

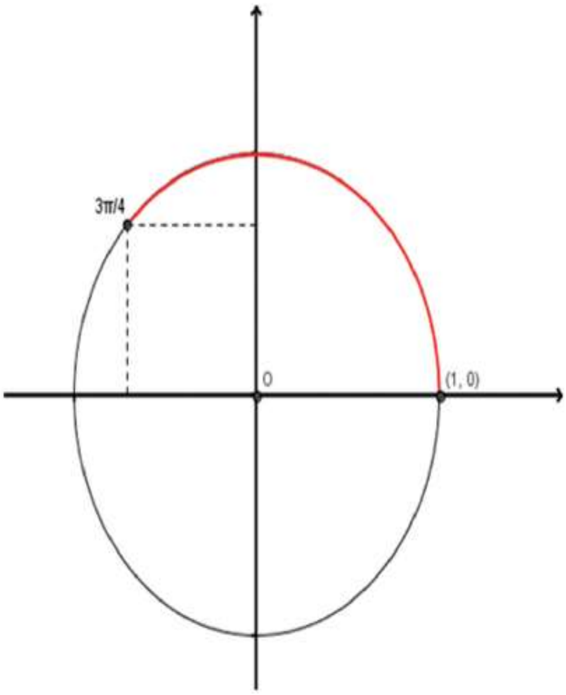
Objetivo

Calcular valores do seno e do cosseno no ciclo trigonométrico e analisar algumas propriedades gerais. Construir a relação fundamental da trigonometria.

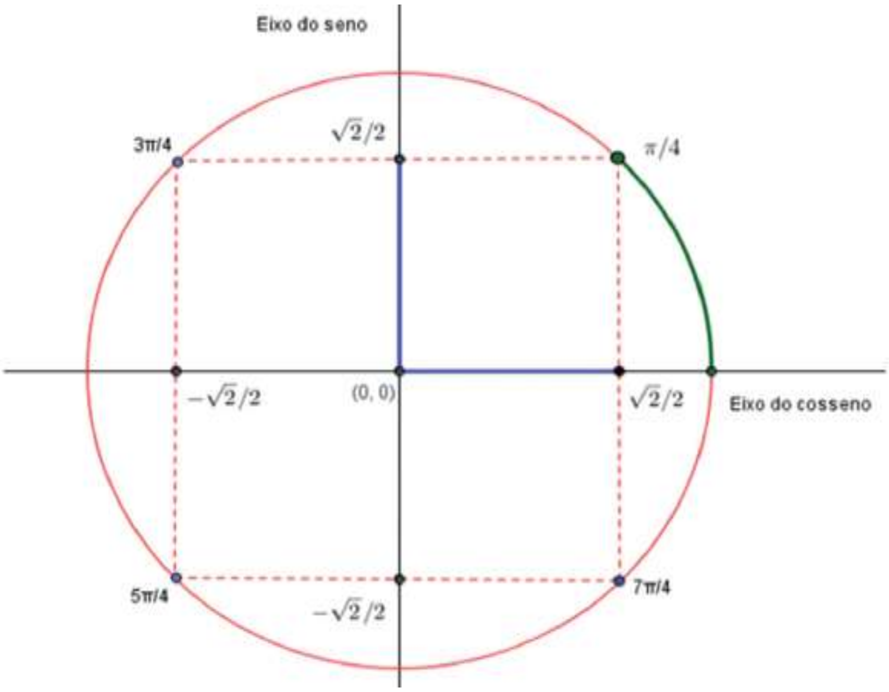
Descrição da atividade

Os alunos vão explorar cálculos e algumas propriedades do seno e do cosseno. Para a realização da atividade, é necessário o conhecimento da redução de um arco ao primeiro quadrante. A atividade proposta é operacional, nela apresentamos um ciclo trigonométrico e suas projeções ortogonais nos eixos *Ox* e *Oy.* Espera-se que o aluno realize cálculos e avalie valores de senos e cossenos, bem como suas propriedades gerais. Veja a atividade.

No ciclo trigonométrico a seguir, indicamos o arco de *3/4π* e as projeções ortogonais de seu ponto extremo que coincidem com as do ângulo correspondente de *3/4π* .



Apresentamos um ciclo trigonométrico e o ângulo de π/ 4 com os respectivos correspondentes nos quadrantes. Verifique que os valores do seno de cada ângulo apresentado ou são iguais ou são simétricos. Veja, ainda, que o mesmo vale para o cosseno.



Calculando o valor do $sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o valor do $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, e efetuando a devida redução ao primeiro quadrante, obtemos os resultados acima.

Agora responda ao que se pede:

a. Qual é o valor de $sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

b - Sabendo que o raio da circunferência do ciclo trigonométrico vale 1 unidade e utilizando o mesmo raciocínio anterior, complete a tabela.

c - Dos ângulos que você completou na tabela acima, quais têm seno e cosseno simultaneamente positivos? E negativos?

d- Para quais ângulos temos seno igual a zero? E cosseno igual a zero?

e- Qual o maior valor que o seno pode assumir? E o cosseno?

F - Qual o menor valor que o seno pode assumir? E o cosseno?

Atividade 3: Desenvolvendo o Ciclo Trigonométrico e suas projeções.

Tempo de duração: 3 tempos

Objetivo

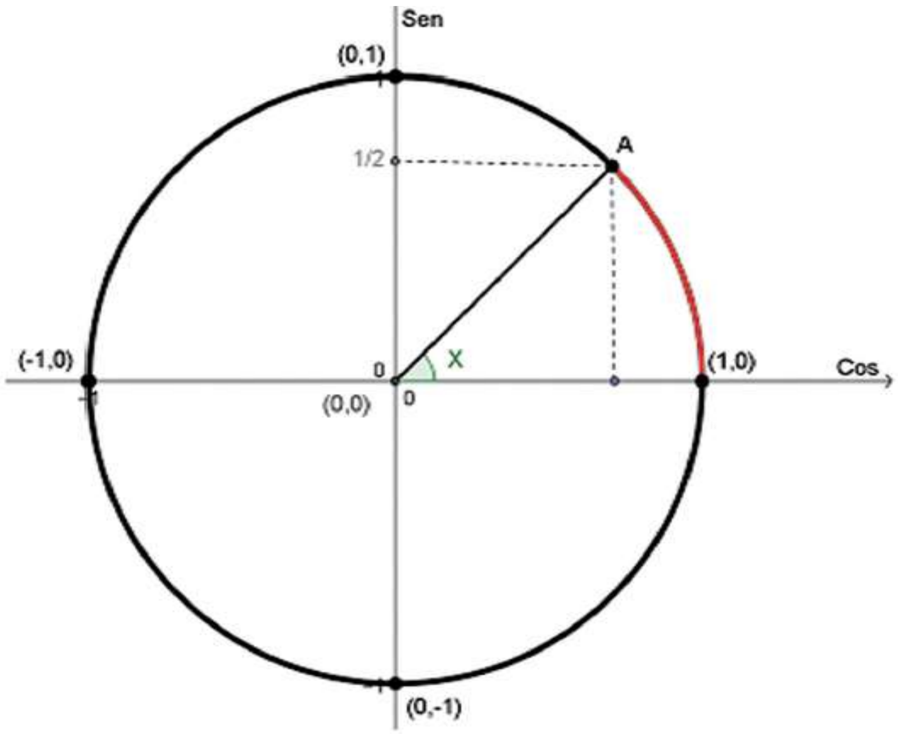
Representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.

Descrição da atividade

Os alunos terão contato com as projeções de ângulos dentro do ciclo trigonométrico, bem como com as fórmulas que facilitarão o desenvolvimento de cálculos. Nela você pode utilizar o anexo da Etapa 2. Vamos começar?

Veja a atividade descrita a seguir.

Observe o ciclo trigonométrico e responda às perguntas.



a. Qual é o valor do seno do ângulo (*x*)?

b. Conforme já vimos na etapa anterior, conhecendo o valor *sen(x),* é possível descobrir o valor de *cos x*. Qual o valor de *cos(x)*?

c. Usando o ciclo trigonométrico da etapa anterior, é possível encontrar o valor do ângulo *x*. Qual é esse valor?

d. Complete a tabela utilizando a fórmula para achar as projeções, indicando o valor do seno e do cosseno das projeções do ângulo *x* no segundo, terceiro e quarto quadrante do ciclo.

e. Utilizando as fórmulas apresentadas na tabela anterior, é possível encontrar as projeções de qualquer ângulo. Complete a tabela e encontre o valor do seno e do cosseno das projeções do angulo de 60°.

Atividade 4: Construção do gráfico da Função Cosseno

Tempo de duração: 2 aulas

Objetivo

Construir o gráfico da função cosseno.

Descrição da atividade

1. Abra uma tela nova no GeoGebra. No campo "Entrada", disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0). O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.
2. Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão 

, disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha, conforme podemos ver abaixo.

3. Precisamos agora marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0). Até agora, sua construção deve estar assim:

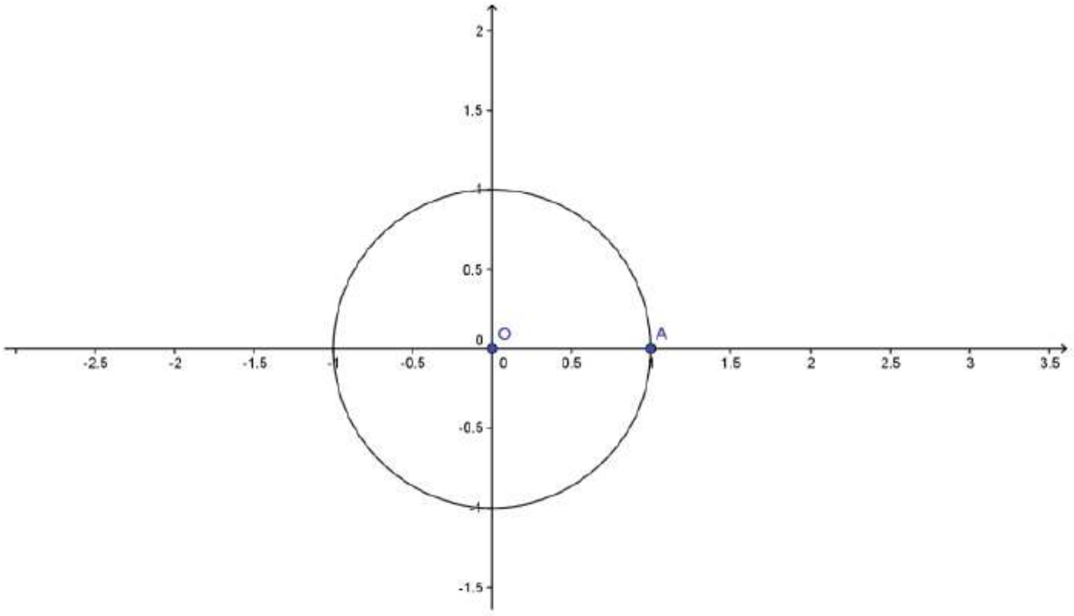


Figura: construção com o GeoGebra.

4. Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.

5. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão  (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação "*d=...*", que representa o comprimento do arco AOE.

6. Digite no campo Entrada os pontos G=(cos(d),0) e R=(d,cos(d)). Surgirão na tela os pontos G e R, de maneira que o comprimento do segmento OG indica o cosseno do arco AOE e o ponto R é o ponto cuja abscissa é o comprimento do arco AOE e a ordenada é o cosseno desse arco. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G e R movendo-se, o primeiro no intervalo de [-1,1] no eixo y

~

7. Quer ver o caminho que o ponto R está descrevendo? Vá na Janela da Álgebra e clique com o outro botão do mouse sobre o ponto R, vai abrir-se uma caixa de opções, como podemos ver na figura abaixo. Clique na opção **Habilitar Rastro** .

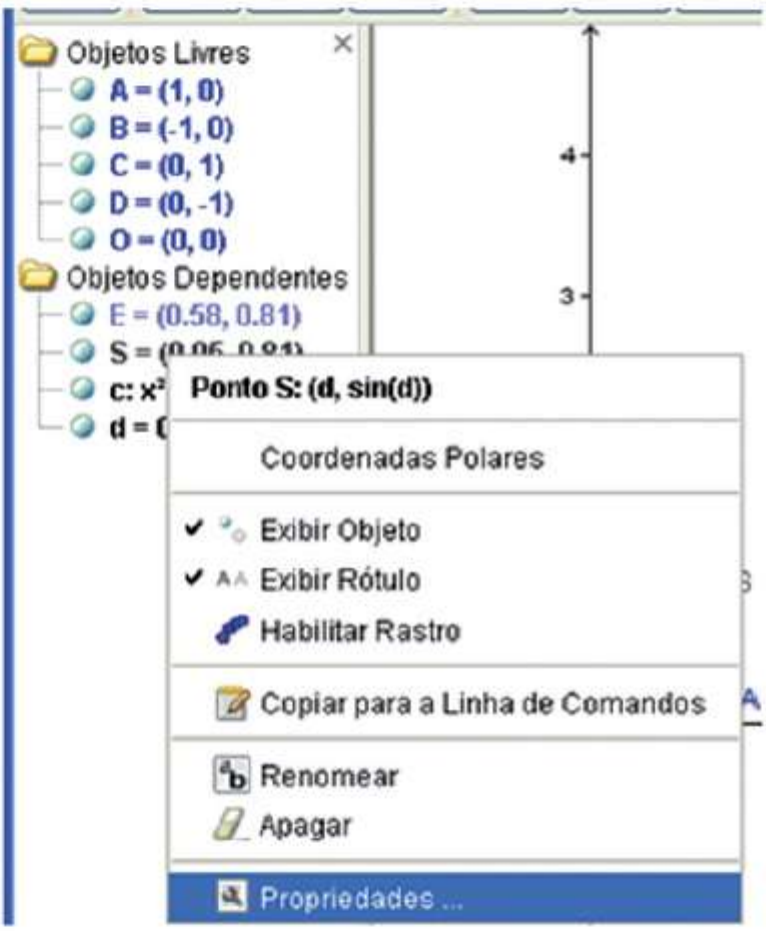
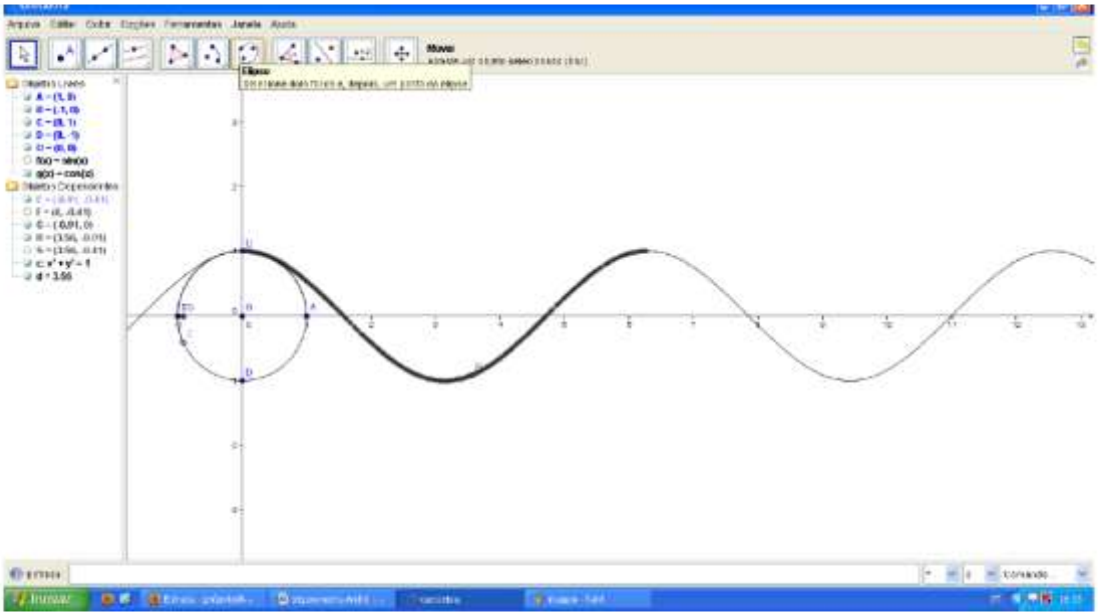


Figura: fragmento de tela do GeoGebra.

8. Agora movimente o ponto E novamente em torno do ciclo trigonométrico e observe o caminho descrito pelo ponto R. Podemos ver que forma-se um ciclo completo de 0 a 2π da função cosseno. Digite agora no campo Entrada a função g(x)=cos(x) e observe. (Para deixar de exibir o rastro do ponto R, basta clicar novamente sobre ele com o outro botão do mouse e desabilitar a opção “habilitar rastro”).



Observe como o comprimento do segmento OG e a posição do ponto R se relacionam. Cada altura assumida por R (cada ordenada) equivale a um comprimento do segmento OG, assim como cada abscissa de R representa um comprimento do arco AOE. Olhe, na Janela da Álgebra, a abscissa do ponto R e o comprimento do arco AOE, indicada por *d*.

Procure agora responder às questões formuladas a seguir a partir do que você construiu e observou.

1. A abscissa do ponto R é o comprimento do arco AOE. Ao movimentar esse ponto no círculo, que valores essa abscissa pode assumir? Ou ainda, perguntando a mesma coisa de forma diferente, qual é o intervalo de variação do comprimento do arco AOE, indicado por *d* na Janela da Álgebra?
2. De acordo com seus conhecimentos sobre o círculo trigonométrico a ordenada do ponto R é uma função da abscissa. Neste caso, que função é essa?

Avaliação

Um dos objetivos de toda avaliação é a verificação dos conhecimentos adquiridos pelo aluno, bem como a análise por parte do professor se há a necessidade de se rever alguns itens que não ficaram muito claros, não atingindo o resultado pretendido de acordo com os descritores que foram trabalhados.
O professor tem que estar sempre atento e pronto a rever sua metodologia a partir da resposta dos alunos de sua turma.
Avaliei os conhecimentos adquiridos através dos TRABALHOS EM GRUPO com consulta (com duração de 50 minutos – 1 tempo de aula além dos 100 minutos utilizados para explicações com exercícios).
Depois de uma revisão, apliquei uma avaliação escrita individual (com duração de 50 minutos – 1 tempo de aula) com a matéria abordada até o momento para investigação da capacidade de utilização dos conceitos e exercícios práticos de conjuntos numéricos.
É importante estar atento ao tempo disponível e à preparação do grupo para a avaliação externa (SAERJINHO) que também deve ser usado como um instrumento de avaliação, por isso coloquei em anexo algumas questões propostas do saerjinho para poderem ser utilizadas com os alunos, aproveitando a oportunidade para verificar se a turma atingiu os objetivos almejados.
A avaliação será feita em todo o processo das atividades, será percebido se o aluno está compreendendo o conteúdo ou não, onde cada aluno fará a exposição do que está assimilando.
Serão dadas questões do Saerjinho para que o aluno possa demonstrar sua habilidade nas questões, serão dados também pontos em um trabalho que pedi sobre a história dos números onde utilizarei mais a frente aqui quando terei que apresentar o trabalho remodelado.

Avaliação

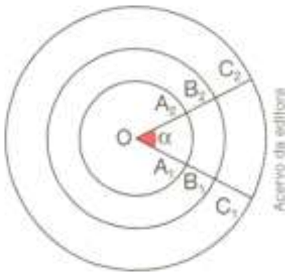
C. E. Professora Vanilde Mattos

Disciplina: Matemática
Professora: Ana Paula
Aluno (a): _________________________________ Nº: _____ Turma 1002 Data: __ / __ / 14

A finalidade dessa atividade é entender como a razão entre o comprimento linear de um arco de circunferência e a medida do raio dessa circunferência pode ser considerada uma unidade de medida para ângulos.

Para a realização dessa atividade, será necessário o uso de régua milimetrada, compasso e transferidor.

Siga as orientações abaixo:



I) Desenhe, utilizando o compasso, três circunferências concêntricas com raios de comprimentos diferentes. Em seguida, trace, a partir do centro das circunferências, dois segmentos de reta formando um ângulo a entre si, determinando, assim, nas três circunferências, os pontos A_1 B_1 e C_1 em um dos segmentos, e os pontos A_2, B_2 e C_2 no outro segmento. Veja a figura ao lado.

II) Medir e anotar os valores do ângulo a e dos raios das três circunferências. Suponha que o ângulo encontrado seja de 54°, e as medidas dos raios dessas circunferências sejam 3cm; 4,7 cm e 6,9cm. Assim, calculamos, em valores aproximados, as medidas dos comprimentos de cada circunferência *e*, por meio de uma regra de três, calculamos também as medidas dos comprimentos dos arcos A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2, que nesse caso são 2,83 cm; 4,43 cm e 6,5 cm, respectivamente.

III) Calcular a razão entre o valor do comprimento do arco de circunferência e o valor do raio da circunferência que contém esse arco.

Ao calcular **as** razões para as três circunferências, encontramos os respectivos valores:

$\frac{2,83}{3} \cong 0,94\overline{3}$; $\frac{4,43}{4,7} \cong 0,943$; $\frac{6,5}{6,9} \cong 0,942$

Você percebeu alguma regularidade nesses valores ?

C. E. Professora Vanilde Mattos

Disciplina: Matemática
Professora: Ana Paula
Aluno (a): _________________________________ Nº: _____ Turma 1002 Data: __ / __ / 14

Lista de Exercícios

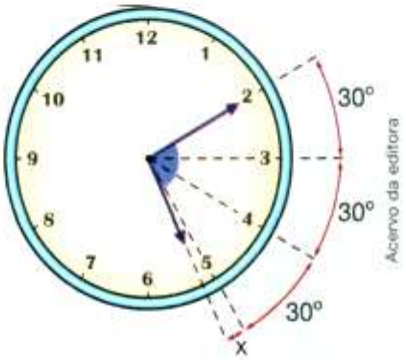
Para que possamos realizar os exercícios que virão, é interessante observar a resolução de algumas questões. Seguem abaixo, questões que auxiliarão na compreensão e consequentemente na resolução de próximas questões.

EXEMPLO 1:

Qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio que marca 5h10min?

Resolução

A medida do ângulo entre horas consecutivas é $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Às 5h10min, o ponteiro dos minutos está indicando o número 2, e o ponteiro das horas está entre os números 5 e 6, conforme a figura.



Como a cada 60min o ponteiro das horas desloca-se 30°, calculamos a medida *x* por meio da seguinte regra de três:

tempo (min)	ângulo (°)
60	30
10	x

$\Rightarrow 60x = 30 \cdot 10 \Rightarrow x = 5 \rightarrow 5^\circ$

Portanto, a medida do menor ângulo formado é $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 5^\circ = 95^\circ$.

‣ Utilizando esse resultado, podemos calcular a medida do menor ângulo formado pelo relógio às 6h10min? Justifique.

Exemplo 2)

Na circunferência de centro *O*, determine o comprimento do arco AB em azul. (Considere ¶ = 3,14.)

Resolução

Utilizamos a regra de três.

medida em graus (°)		comprimento do arco (cm)
360	———	$2\pi r$
45	———	x

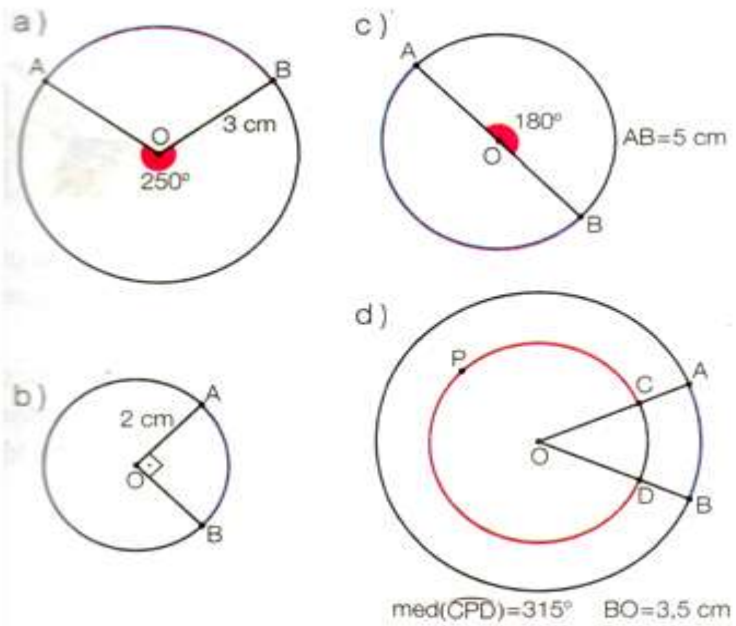
$$\frac{360}{45}=\frac{2\pi \overset{3}{\widehat{r}}}{x}\Rightarrow 360x=2\pi\cdot 3\cdot 45\Rightarrow x=\frac{270\overset{3,14}{\widehat{\pi}}}{360}=2,355$$

Portanto, o comprimento do arco é 2,355 cm.

<u>**Atividades:**</u>

Quando necessário, na resolução das atividades deste capítulo, considere ¶ = 3,14.

1) Em cada circunferência, determine o comprimento e a medida, em graus, do arco AB em azul.



2) Expresse em radianos a medida de cada arco AB em azul da atividade anterior.

3) Expresse, em graus, a medida de cada arco

a) $med(\widehat{AB}) = \frac{5\pi}{18}$ rad c) $med(\widehat{EF}) = \frac{13\pi}{9}$ rad

b) $med(\widehat{CD}) = \frac{7\pi}{9}$ rad d) $med(\widehat{GH}) = \frac{16\pi}{9}$ rad

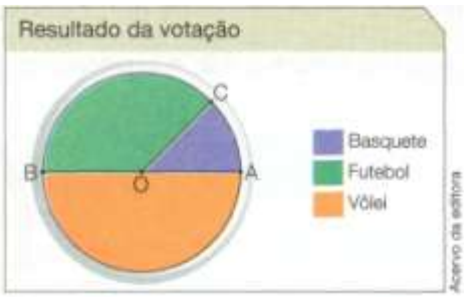
4) Em uma competição de ciclismo, cada atleta deve percorrer, em 2h30min, 78,5 km em uma pista circular de raio igual a 500 m.

a) Quantas voltas na pista serão necessárias para que um ciclista percorra os 78,5 km?

b) Qual é o tempo médio máximo em que um atleta deve realizar cada volta para cumprir a prova ?

5) Localizada em Cingapura, a Singapore Flyer, com 150 m de diâmetro, é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Cada uma das 28 cabines da Singapore Flyer comporta até 28 pessoas; assim, em apenas uma volta, ela pode levar até 784 pessoas. Qual é a distância, aproximada, percorrida por uma das cabines após realizar uma volta completa?

6) A professora de Educação Física pediu a certa turma que, por votação, escolhesse um esporte, entre vôlei, basquete e futebol, para praticar nas aulas da semana seguinte.



O segmento AB, que representa o diâmetro do gráfico de setores, mede 12 cm, e o comprimento do menor arco AC é $\frac{3\pi}{2}$ cm.

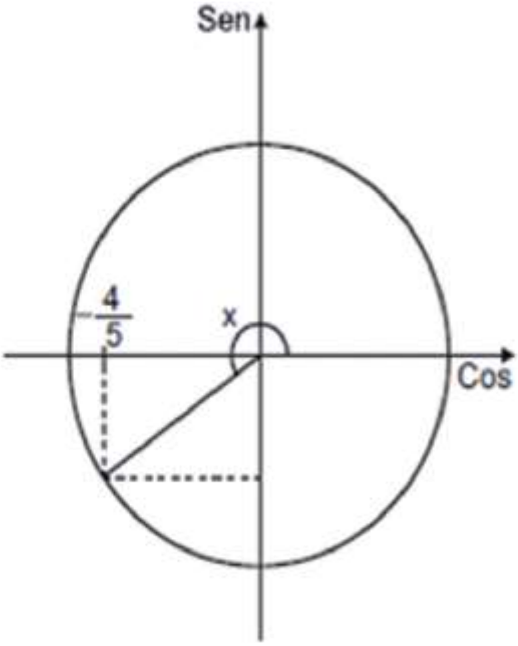
Sabendo que o esporte basquete recebeu 4 votos, responda:

a) Qual foi o esporte mais votado? Quantos alunos optaram por esse esporte?

b) Quantos alunos participaram da votação?

c) Quantos alunos votaram em futebol.

7) (Saerjinho M110055B1) Observe o ciclo trigonométrico.



Qual é o valor de *sen (x)*?

$a)\ \frac{1}{5}$

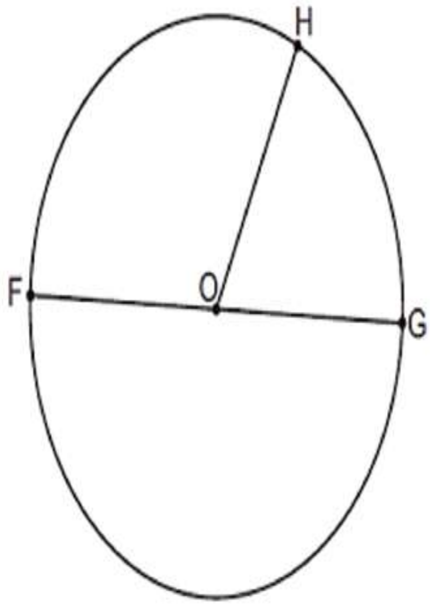
$b) -\frac{1}{5}$

$c)\ \frac{3}{5}$

$d)\ -\frac{3}{5}$

$e)\ \frac{9}{5}$

8) (Saerjinho M101020RJ) Observe o desenho da circunferência de centro *O* e raio 10 *cm*.



O valor do segmento FG, em centímetros, é:

a. 20

b. 12

c. 8

d. 5

e. 2

Referencial Bibliográfico:

GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto. *Matemática Completa.* São Paulo: FTD,2005.

GIOVANNI, José Ruy. et al. *Matemática Fundamental – Uma Nova Abordagem*. São Paulo: FTD,2005.

RIBEIRO, Jackson. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.Vol.2.* São Paulo: Scipione, 2011.

- Secretaria de Estado de Educação. Disponível em
<http://projetoseeduc.cecierj.edu.br> Acessado em 25de outubro de 2014